**Durée : 4 heures**

# ∽ Corrigé du baccalauréat S Polynésie 19 juin 2019 ∾

## Exercice I — 5 points

**Commun à tous les candidats**

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

Un commerçant vient de s'équiper d'un distributeur de glaces à l'italienne.

1. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne de son distributeur de glaces à l'italienne est modélisée par une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ où $\lambda$ est un réel strictement positif (on rappelle que la fonction $f$ de densité de la loi exponentielle est donnée sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur, c'est-à-dire l'espérance mathématique de $X$, est de 10 mois.

   **a.** L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

   $E(X) = 10 \iff \dfrac{1}{\lambda} = 10 \iff \lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$ donc $\boxed{\lambda = 0,1}$.

   **b.** Si $F$ est la fonction de répartition de X, on saut que $F(t) = P(0 \leqslant X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$

   $= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

   Alors : $P(X \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc $P(X > 6) = \mathrm{e}^{-6\lambda} = \mathrm{e}^{-0,6} \approx \boxed{0,55}$.

   La probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois est environ égale à 0,55.

   **c.** Une loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement, donc

   $P_{X>6}(X > 12) = P(X > 6) \approx \boxed{0,55}$.

   Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année est environ égale à 0,55.

   **d.** Le commerçant remplacera son distributeur de glaces à l'italienne au bout d'un temps $t$, exprimé en mois, qui vérifie que la probabilité de l'évènement $(X > t)$ est égale à 0,05.

   $P(X > t) = 0,05 \iff \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0,05 \iff -\lambda t = \ln(0,05) \iff t = \dfrac{\ln(0,05)}{-\lambda} = \dfrac{\ln(0,05)}{-0,1} \approx \boxed{30}$.

   Il faut 30 mois pour que la probabilité que l'appareil dépasse ce temps de fonctionnement soit égal à 0,05.

2. La notice du distributeur de glaces précise que le distributeur fournit des glaces à l'italienne dont la masse est comprise entre 55 g et 65 g.

   On considère la variable aléatoire $M$ représentant la masse, en grammes, d'une glace distribuée. On admet que $M$ suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart-type 2,5.

   **a.** $\mu = 60$ ; $\sigma = 2,5$. $P(55 \leqslant M \leqslant 65) = P(\mu - 2\sigma \leqslant M \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$ (d'après le cours) ; $\boxed{P(55 \leqslant M \leqslant 65) \approx 0,95}$.

   **b.** $P(M \geqslant m) = 0,99 \iff P(M < m) = 0,01$. À la calculatrice, on trouve : $\boxed{m \approx 54}$

3. Le distributeur de glaces à l'italienne permet de choisir un seul des deux parfums : vanille ou fraise. Pour mieux gérer ses achats de matières premières, le commerçant fait l'hypothèse qu'il y aura en proportion deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise.

Le premier jour d'utilisation de son distributeur, il constate que sur 120 consommateurs, 65 ont choisi de la glace à la vanille.
La taille de l'échantillon est $n = 120$ et la proportion théorique de personnes choisissant une glace à la vanille est $p = \frac{2}{3}$.
On a : $n = 120 \geqslant 30$ ; $np = 80 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 40 \geqslant 5$.
On peut alors utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.

$$I_{120} = \left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{2}{3} - 1{,}96 \times \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt{120}}\ ;\ \frac{2}{3} + 1{,}96 \times \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt{120}}\right]$$

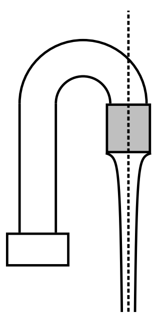
$\approx \boxed{[0,58\ ;\ 0,76]}$.

La fréquence observée est $f = \frac{65}{120}\frac{13}{24} \approx 0,54 \notin I_{120}$.
Avec un risque d'erreur de 5 %, **on peut remettre en cause** l'affirmation du distributeur.

## Exercice II **5 points**

**Commun à tous les candidats**

L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.

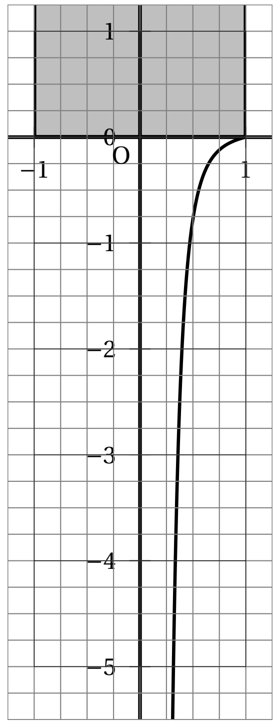


On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe 1** par la courbe $C$ dans un repère orthonormé.

### Partie A

On considère que la courbe $C$ donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $f$ dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(H) : f(1) = 0 \qquad f'(1) = 0,25 \quad \text{et} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$




1. Non, $f$ ne peut pas être une fonction polynôme du second degré ! En effet, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} = c \neq -\infty$.
2. Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = k\ln x$.

   **a.**
   - $g(1) = k\ln 1 = 0$
   - $g'(x) = \dfrac{k}{x}$ donc $g'(1) = 0,25 \iff k = 0,25$ d'où $g(x) = 0,25\ln x$.
   - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (0,25\ln x) = -\infty$

   Par conséquent : $\boxed{g(x) = 0,25\ln x}$.

   **b.** $g(0,25) = 0,25\ln(0,25) \approx -0,35$ alors que sur la courbe, $f(0,25) < -5$ donc les deux courbes ne coïncident pas.
3. Soit $h$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $h(x) = \dfrac{a}{x^4} + bx$ où $a$ et $b$ sont des réels.

   On a : $h(x) = -\dfrac{4a}{x^5}$.

   $$\begin{cases} h(1) = 0 \\ h'(1) = 0,25 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + b = 0,25 \end{cases} \iff \begin{cases} -5a = 0,25 \\ a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -0,05 \\ b = 0,05 \end{cases}.$$

   On en déduit que $\boxed{h(x) = -\dfrac{0,05}{x^4} + 0,05x}$.

   Il est clair alors que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty$.

### Partie B

On admet dans cette partie que la courbe $C$ est la représentation graphique d'une fonction $f$ continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; 1]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right).$$

On remarque que c'est l'expression trouvée précédemment.

**1.** Sur $]0 ; 1]$, $f$ st continue, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 0$.
L'intervalle image $]-\infty ; 0]$ contient le nombre $-5$.
D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = -5$ admet au moins une solution.
$f'(x) = \dfrac{1}{20}\left(1 + \dfrac{4}{x^5}\right) > 0$ sur $]0 ; 1]$ donc $f$ est croissante sur cet intervalle. L'équation $f(x) = -5$ admet donc une unique solution, que l'on note $\alpha$.
À la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx 0,32}$

**2.** On admet que le volume d'eau en $cm^3$, contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule : $V = \displaystyle\int_\alpha^1 \pi x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

**a.** Soit $u$ la fonction dérivable sur $]0 ; 1]$ définie par $u(x) = \dfrac{1}{2x^2}$. $u(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^2}$ donc
$u'(x) = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right) = \boxed{-\dfrac{1}{x^3}}$.

**b.** $V = \displaystyle\int_\alpha^1 \pi x^2 \left(1 + \frac{4}{x^5}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{20}\int_\alpha^1 \left(x^2 + \frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{20}\left[\frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{1}{2x^2}\right]_\alpha^1 = \frac{\pi}{20}\left(\frac{1}{3} - 2 - \left(\frac{\alpha^3}{3} - \frac{2}{\alpha^2}\right)\right)$
$= \boxed{\dfrac{\pi}{20}\left(-\dfrac{5}{3} - \dfrac{\alpha^3}{3} + \dfrac{2}{\alpha^2}\right)}$.

$\boxed{V \approx 2,8\ \text{cm}^3}$

## Exercice III 5 points

**Commun à tous les candidats**

On considère la suite $(I_n)$ définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}\,x$ et pour tout entier naturel $n$ non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}\,x.$$

**1.** On pose $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ; on pose $u(x) = 1 - x$ donc $u'(x) = -1$.
Alors $f_0 = -\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) > 0$ sur $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$.
Une primitive de $f_0$ est donc $F_0 = -\ln u$ donc $F(x) = -\ln(1-x)$.
$I_0 = F\left(\dfrac{1}{2}\right) - F(0) = -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln 1 = \ln 2$ donc $\boxed{I_0 = \ln 2}$.

**2.** **a.** $I_0 - I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (linéarité)

$= \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{I_0 - I_1 = \frac{1}{2}}$.

**b.** On en déduit $I_1 = I_0 - \dfrac{1}{2} = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$ ; $\boxed{I_1 = \ln 2 - \frac{1}{2}}$

**3.** **a.** Pour tout $n$ : $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n - x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (linéarité)

$= \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$ donc $\boxed{I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}}$.

**b.** On peut utiliser l'algorithme suivant :

```
I ← ln(2)
Si n > 0
        Pour k allant de 0 à n − 1 faire
        I ← I − (1/2)^(k+1) / (k+1)
        Fin Pour
Fin Si
```

**4.** Soit $n$ un entier naturel non nul.

On admet que si $x$ appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

**a.** Par conservation de l'ordre :

$0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}$.

Par conséquent : $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n}}$.

**b.** $2 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ d'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

**5.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

**a.** Montrons par récurrence que : $Sn = I_0 - I_n$ :

- **Initialisation** : Pour $n = 1$ : $I_0 - I_1 = \dfrac{1}{2}$ (question 2. (a)) et $S_1 = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{S_1 = I_0 - I_1}$ ; la propriété est **initialisée**.
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie à un rang $n$ quelconque : donc $Sn = I_0 - I_n$.

  Alors : $S_{n+1} = S_n + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = I_0 - I_n + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = I_0 - \left(I_n - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\right) = \boxed{I_0 - I_{n+1}}$.

  La propriété est donc **héréditaire**

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

**b.** Pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = I_0 - I_n$ ; or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \boxed{\ln 2}$

## Exercice IV **5 points**

**Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité**

Figure complétée à la fin de l'exercice :
- ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 12, AD = 18 et AE = 6
- EBDG est un tétraèdre.

.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine A dans lequel les points B, D et E ont pour coordonnées respectives B(12 ; 0 ; 0), D(0 ; 18 ; 0) et E(0 ; 0 ; 6).

1. $3x+2y+6z-36=0$ est une équation cartésienne de plan.
   E, B et D ne sont pas alignés donc définissent un plan.
   $3x_E+2y_E+6z_E-36=3\times 0+2\times 0+6\times 6-36=0$
   $3x_B+2y_B+6z_B-36=3\times 12+2\times 0+6\times 0-36=0$
   $3x_D+2y_D+6z_D-36=3\times 0+2\times 18+6\times 0-36=0$
   Les coordonnées de E, B et D vérifient cette équation de plan.
   Ces points E, B et D appartiennent à ce plan, donc le plan (EBD) a pour équation $\boxed{3x+2y+6z-36=0}$.

2. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}12\\18\\6\end{pmatrix}$.

   Une représentation paramétrique de la droite (AG) est alors $\boxed{\begin{cases}x=12t\\y=18t\\z=6t\end{cases}, \ t\in\mathbb{R}}$.

   **b.** On cherche les coordonnées de K, point d'intersection de (AG) et de (EBD).

   On résout alors le système $\begin{cases}x=12t\\y=18t\\z=6t\\3x+2y+6z-36=0\end{cases}$.

   On en déduit $3\times 12t+2\times 18t+6\times 6t-36=0 \iff 108t=36 \iff t=\dfrac{1}{3}$.
   On en déduit K(4 ; 6 ; 2).

3. Un vecteur normal au plan (EBD) est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AG}$ (même troisième coordonnée, mais autres coordonnées différentes) donc (AG) n'est pas orthogonale au plan (EBD).

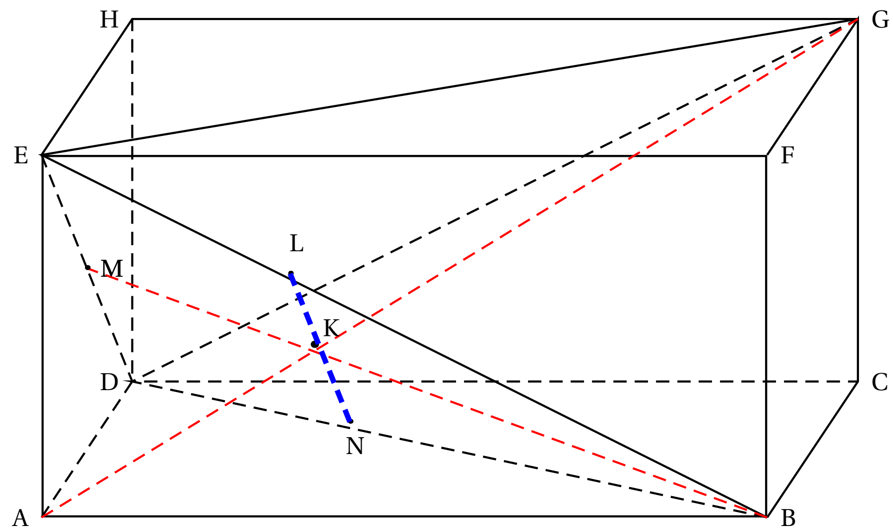
4. **a.** M est le milieu du segment [ED]. M(0 ; 9 ; 3).
   Alors : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-12\\9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-8\\6\\2\end{pmatrix}$.
   Il est alors clair que $\overrightarrow{BK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM}$ donc ces deux vecteurs sont **colinéaires**.
   B, K et M sont bien alignés.

   **b.** Le point K est donc le point d'intersection des droites ( AG) et ( BM).

5. On note P le plan parallèle au plan (ADE) passant par le point K.

   **a.** Les plans (AED ) et (EBD) se coupent selon la droite ( ED ) . Le plan P est parallèle au plan ( AED ) et passe par le point K . Le point K appartient donc aux plans (EBD ) et P . Par conséquent l'intersection du plan P et du plan ( EBD ) est une droite parallèle à la droite (ED) passant par le point K.

**b.** Figure.




## Exercice 4 — 5 points

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et les suites d'entiers naturels $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$u_0 = 1,\ v_0 = 0$, et pour tout entier naturel $n$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

**Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.**

### Partie A

On a calculé les premiers termes de la suite $(v_n)$ :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | 0 | 1 | 4 | 15 | 56 | 209 | 780 | 2 911 | 10 864 | 40 545 | 151 316 | 564 719 | 2 107 560 |

1. Il semble que le chiffre des unités de $v_n$ appartienne à l'ensemble $\{0\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 9\}$.
2. On admet que pour tout entier naturel $n$, $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   **a.** JD'après la calculatrice : $M^3 = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$.

   On en déduit $\begin{cases} u_{n+3} = 26u_n + 45v_n \\ v_{n+3} = 15u_n + 26v_n \end{cases}$.

   **b.** $15 \equiv 0\ [5]$ et $26 \equiv 1\ [5]$ donc $\boxed{v_{n+3} \equiv v_n\ [5]}$.
3. Soit $r$ un entier naturel fixé. Montrons par récurrence sur l'entier naturel $q$ que $v_{3q+r} \equiv v_r\ [5]$.

   - **Initialisation** : Si $q = 0$, alors $v_{3q+r} = v_r \equiv v_r\ [5]$.
     La propriété est **initialisée**.

- **Hérédité** : On suppose la propriété vraie au rang $q$.
  Donc $v_{3q+r} \equiv v_r$ [5].
  Montrons qu'elle encore vraie au rang $q+1$ , c'est-à-dire que $v_{3(q+1)+r} \equiv v_r$ [5] soit encore $v_{3q+r+3} \equiv v_r$ [5].
  D'après la question précédente, en prenant $n = 3q + r$ , on a $v_{3q+r+3} \equiv v_{3q+r}$ [5] . D'après l'hypothèse de récurrence on a $v_{3q+r} \equiv v_r$ [5].
  Par conséquent $v_{3(q+1)+r} \equiv v_r$ [5].
  La propriété est vraie au rang $q+1$, donc elle est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout $q$.

**4.** Ainsi, pour tout entier naturel $q$ on a :
- $v_{3q} \equiv v_0$ [5] soit $v_{3q} \equiv 0$ [5]
- $v_{3q+1} \equiv v_1$ [5] soit $v_{3q+1} \equiv 1$ [5]
- $v_{3q+2} \equiv v_2$ [5] soit $v_{3q+2} \equiv 4$[5].

On obtient ainsi tous les termes de la suite, donc on en conclut que pour tout entier naturel $n$, le terme $v_n$ est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.

**5.** On en déduit que $u_n$ est congru à 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ou 9 modulo 10, donc le chiffre des unités est une de ces cinq valeurs.

## Partie B

L'objectif de cette partie est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant la matrice $M$.

Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. Dans ce cas, $\sqrt{3}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ où $p$ et $q$ sont des entiers naturels non nuls, avec $q$ le plus petit entier naturel possible.

**1.** On a $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$ ; comme $\sqrt{3} > 1$, on a $p < q$.

On a aussi : $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow 3 = \dfrac{p2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 3p^2 < 4p^2 \Rightarrow q < 2p$.

On en déduit : $\boxed{q < p < 2q}$.

**2.** $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

Soit le couple $(p' ; q')$ défini par $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

**3.** **a.** $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \iff (p'\ q') = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \iff \begin{cases} p' = 2p - 3q \\ q' = -p + 2q \end{cases}$

**b.** $p$ et $q$ sont des entiers, donc $2p - 3q$ et $-p + 2q$ sont des entiers relatifs.

**c.** On a : $q' = -p + 2q = -q\sqrt{3} + 2q = (2 - \sqrt{3})q$ donc $q = \dfrac{q'}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{q'(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$= \boxed{q'(2+\sqrt{3})}$.

Alors : $p' = 2p - 3q = 2q\sqrt{3} - 3q = (2\sqrt{3} - 3)q = (2\sqrt{3} - 3)(2+\sqrt{3})q' = \sqrt{3}q'$ donc $\boxed{p' = \sqrt{3}q'}$

d'où $\boxed{\sqrt{3} = \dfrac{p'}{q'}}$.

**d.** On a trouve à la question 1. : $q < p < 2q$.

$q < p < 2q \Rightarrow -2q < -p < -q \Rightarrow 0 < -p + 2q < q \Rightarrow \boxed{0 < q' < q}$.

**e.** On a supposé au départ que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ entiers naturels, $q$ le plus petit possible.

Or, on vient de trouver qu'alors, on avait $\sqrt{3} = \dfrac{p'}{q'}$, avec $q'$ entier naturel et $0 < q' < q$.

$q$ n'était donc pas le plus petit entier naturel possible, d'où une **contradiction**.

$\sqrt{3}$ n'est donc pas un nombre rationnel.