

Corrigé du baccalauréat S Polynésie

5 septembre 2017

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Un parc d'attraction propose à son public un tout nouveau grand huit. Pour des raisons de sécurité, son accès n'est autorisé qu'aux personnes dont la taille est supérieure ou égale à 1,40 m et dont l'âge est compris entre 10 et 70 ans. Des études statistiques sont menées pour évaluer l'affluence et la satisfaction des visiteurs pour ce manège.

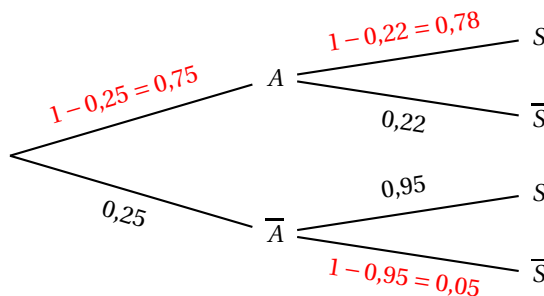
1.
 - a. La taille en centimètres d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisée par la variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 165 et d'écart-type 20. La probabilité qu'un visiteur ait la taille requise pour accéder à ce grand huit est $P(140 \leq T) \approx 0,8944$.
 - b. L'âge d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 17. La probabilité qu'un visiteur ait l'âge requis pour accéder à ce grand huit est $P(10 \leq X \leq 70) \approx 0,8710$.
 - c. Les études menées permettent d'établir que 89 % des visiteurs ont la taille exigée, 87 % ont l'âge requis mais 8 % n'ont ni la taille, ni l'âge obligatoires. On désigne par T les personnes ayant la taille requise et par X celles qui ont l'âge requis. On regroupe ces informations dans un tableau que l'on complète :

	T	\bar{T}	Total
X	84 %	3 %	87 %
\bar{X}	5 %	8 %	13 %
Total	89 %	11 %	100 %

On voit ainsi que ceux qui ont à la fois la taille et l'âge requis sont 84 %.

2. Un sondage est réalisé à la sortie du grand huit et révèle que 25 % des personnes ont attendu moins de 30 min avant de pouvoir essayer le manège. Parmi elles, 95 % sont satisfaites de l'attraction. En revanche, 22 % des personnes ayant attendu plus de 30 min ne sont pas satisfaites de l'attraction. On choisit au hasard un visiteur à sa sortie du grand huit. On note A l'évènement « le visiteur a attendu plus de 30 min » et S l'évènement « le visiteur est satisfait de l'attraction ».

On regroupe ces informations dans un arbre pondéré :



- a. La probabilité qu'un visiteur soit satisfait est, d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P(A \cap S) + P(\bar{A} \cap S) = 0,75 \times 0,78 + 0,25 \times 0,95 = 0,8225$.

b. Le directeur rencontre un visiteur insatisfait. La probabilité que ce visiteur ait attendu moins de 30 min est : $P_{\bar{S}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{A})}{P(\bar{S})} = \frac{0,25 \times 0,05}{1 - 0,8225} \approx 0,0704$.

3. Le directeur est soucieux de savoir si le temps d'attente, plus important les jours de grande affluence, remet en cause le taux de satisfaction des visiteurs. Pour cela, on interroge 200 personnes au hasard à la sortie du grand huit. Parmi elles, 46 se disent insatisfaites.

La proportion d'insatisfaites est de $p = 1 - 0,8225 = 0,1775$. L'échantillon est de taille $n = 200$. $n = 200 \geq 30$, $np = 200 \times 0,1775 = 35,5 \geq 5$ et $n(1 - p) = 200 \times 0,8225 = 164,5 \geq 5$, donc les conditions sont vérifiées pour déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de visiteurs insatisfaites :

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[0,1775 - 1,96 \frac{\sqrt{0,1775(1-0,1775)}}{\sqrt{200}} ; 0,1775 + 1,96 \frac{\sqrt{0,1775(1-0,1775)}}{\sqrt{200}} \right] \\ &\approx [0,1245 ; 0,2305] \end{aligned}$$

Sur 200 personnes, 46 se disent insatisfaites, ce qui fait une fréquence de $f = \frac{46}{200} = 0,23$.

Cette fréquence appartient à I donc, au risque de 5 %, on peut rassurer le directeur.

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'une tumeur composée de cellules cancéreuses. On note $N(t)$ le nombre de cellules cancéreuses après un temps t exprimé en semaines et $N(0) = N_0$ le nombre de cellules cancéreuses au premier examen.

Pour tout réel t positif ou nul, on admet qu'il existe un nombre a tel que $N(t) = N_0 e^{at}$.

1. Des cultures en laboratoire ont montré que le nombre de cellules de la tumeur double en 14 semaines ; cela signifie que $N(t+4) = 2N(t)$. On résout cette équation d'inconnue a :

$$\begin{aligned} N(t+4) = 2N(t) &\Leftrightarrow N_0 e^{a(t+4)} = 2N_0 e^{at} \Leftrightarrow e^{at+4a} = 2e^{at} \Leftrightarrow e^{at} \times e^{4a} = 2e^{at} \\ &\Leftrightarrow e^{4a} = 2 \Leftrightarrow 4a = \ln(2) \Leftrightarrow a = \frac{\ln(2)}{4} \end{aligned}$$

2. En arrondissant la valeur de a obtenue, on peut écrire pour tout réel $t \geq 0$, $N(t) = N_0 e^{0,05t}$.

La plus petite tumeur détectable au toucher contient environ 10^9 cellules. Lorsqu'une tumeur est détectable, on décide d'opérer le patient afin de la retirer. Or, après intervention, il est possible qu'il reste jusqu'à 10^4 cellules indétectables.

On admet qu'au temps t_0 il y a $N(t_0) = 10^4$ cellules dans la tumeur. On cherche la différence $t - t_0$ avec $N(t) = 10^9$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} N(t) = 10^9 \Leftrightarrow N_0 e^{0,05t} = 10^9 \\ N(t_0) = 10^4 \Leftrightarrow N_0 e^{0,05t_0} = 10^4 \end{array} \right\} &\Rightarrow \frac{N_0 e^{0,05t}}{N_0 e^{0,05t_0}} = \frac{10^9}{10^4} \Leftrightarrow e^{0,05(t-t_0)} = 10^5 \\ &\Leftrightarrow 0,05(t-t_0) = \ln(10^5) \Leftrightarrow t-t_0 = \frac{\ln(10^5)}{0,05} \end{aligned}$$

$\frac{\ln(10^5)}{0,05} \approx 230$; c'est donc au bout de 230 semaines que la tumeur pourrait redevenir détectable au toucher.

Partie B

Pour atténuer le risque de récurrence, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie. Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en $\mu\text{mol.L}^{-1}$, peut être modélisée en fonction du temps t , exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$c(t) = \frac{D}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{80}t}\right)$$

- où
- D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure;
 - k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

1. Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur $112 \mu\text{mol.h}^{-1}$; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament : elle est égale à $6,8 \mu\text{mol.L}^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{a. } c(6) = 6,8 &\iff \frac{112}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{80} \times 6}\right) = 6,8 \iff 112 \left(1 - e^{-\frac{3}{40}k}\right) = 6,8k \\ &\iff 112 \left(1 - e^{-\frac{3}{40}k}\right) - 6,8k = 0. \end{aligned}$$

- b. Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 112 \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) - 6,8x$.

$$f'(x) = 112 \times \frac{3}{40} e^{-\frac{3}{40}x} - 6,8 = 8,4 e^{-\frac{3}{40}x} - 6,8$$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 8,4 e^{-\frac{3}{40}x} - 6,8 > 0 \iff e^{-\frac{3}{40}x} > \frac{6,8}{8,4} \iff -\frac{3}{40}x > \ln\left(\frac{6,8}{8,4}\right) \\ &\iff x < -\frac{40}{3} \ln\left(\frac{6,8}{8,4}\right). \text{ On pose } x_0 = -\frac{40}{3} \ln\left(\frac{6,8}{8,4}\right); \text{ alors } x_0 \approx 2,82. \end{aligned}$$

$$f(0) = 112(1 - e^0) - 6,8 \times 0 = 0; f(x_0) \approx 2,17 \text{ et } f(10) \approx -8,9 < 0.$$

On établit le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$ et on place 10 :

x	0	x_0	10	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	
$f(x)$	0	$\nearrow \approx 2,17$	$\searrow \approx -8,9$	

D'après le tableau de variations de f , on peut déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.

- c. $f(5) \approx 1,02 > 0$ et $f(6) \approx -0,21 < 0$ donc $\alpha \in [5; 6]$;
 $f(5,8) \approx 0,066 > 0$ et $f(5,9) \approx -0,072 < 0$ donc $\alpha \in [5,8; 5,9]$;
 $f(5,84) \approx 0,012 > 0$ et $f(5,85) \approx -0,002 < 0$ donc $\alpha \in [5,84; 5,85]$;
donc une valeur approchée de cette solution est 5,85.

Cela signifie que, pour une clairance de 5,85 litres par heure et un débit de $112 \mu\text{mol.h}^{-1}$, au bout de 6 heures, la concentration du médicament est de $6,8 \mu\text{mol.L}^{-1}$.

2. a. On détermine la limite de $c(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} k > 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{k}{80}t = -\infty \\ \text{on pose } T = -\frac{k}{80}t \\ \lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{k}{80}t} = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{D}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{80}t}\right) = \frac{D}{k}$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = \frac{D}{k}.$$

- b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ . Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de $16 \mu\text{mol.L}^{-1}$.

La limite égale à $\frac{D}{k}$ est de $16 \mu\text{mol.L}^{-1}$ pour une clairance k de $5,85 \text{ L.h}^{-1}$.

Donc $\frac{D}{5,85} = 16$ donc $D = 93,6 \mu\text{mol.h}^{-1}$.

EXERCICE 3

3 points

Commun à tous les candidats

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b , $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la droite \mathcal{D} d'équation $y = -x + 2$.

1. Si le réel θ appartient à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$, alors

$$-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \text{ et donc } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle. On pose $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\theta \in \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$.

Le nombre z a donc pour partie réelle $x = \rho \cos(\theta)$ et pour partie imaginaire $y = \rho \sin(\theta)$.

D'après la formule $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, on a :

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(\theta) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(\theta) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\theta) + \sin(\theta))$$

- Si le point $M(z)$ appartient à la droite \mathcal{D} , alors $y = -x + 2$; on en déduit que $x + y = 2$ ce qui équivaut à $\rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) = 2$ ou encore $\rho(\cos(\theta) + \sin(\theta)) = 2$

$$\text{Or } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \text{ donc } \rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \rho(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \text{ donc}$$

$$\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 \text{ et donc } \rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

$$\text{On en déduit que } \rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

- Réciproquement, on suppose que $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$.

$$\text{Comme } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\theta) + \sin(\theta)), \text{ on en déduit que } \rho = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\theta) + \sin(\theta))}$$

ce qui équivaut à $\rho(\cos(\theta) + \sin(\theta)) = 2$ ou $x + y = 2$ ou encore $y = -x + 2$.

On en conclut que le point $M(z)$ appartient à la droite \mathcal{D} d'équation $y = -x + 2$.

On a donc démontré que le point M appartient à la droite \mathcal{D} si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation : $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$, avec $\theta \in \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$ et $\rho > 0$.

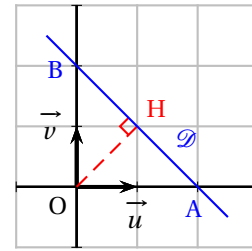
3. Un point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient à la droite \mathcal{D} si et seulement si $y = -x + 2$. La distance OM est minimale si et seulement si le nombre OM^2 est minimum.

$$OM^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (-x + 2)^2 = x^2 + x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 4$$

$2x^2 - 4x + 4$ est un polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2 > 0$; ce polynôme admet donc un minimum pour

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1. \text{ De plus } y = -x + 2 = -1 + 2 = 1.$$

Le point H de la droite \mathcal{D} le plus proche de l'origine a pour coordonnées $(1 ; 1)$.



Remarque : il y a plusieurs autres façons de déterminer les coordonnées du point de la droite \mathcal{D} le plus proche de O .

- D'après la question précédente, on sait que $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$ donc ρ sera minimum si $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ est maximum. Comme $\theta - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, le maximum de $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ se produit quand il vaut 1 et donc quand $\theta - \frac{\pi}{4} = 0$, c'est-à-dire pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. On déduit alors que le point réalisant le minimum a pour coordonnées $(1 ; 1)$.

- Il y a une solution géométrique très élémentaire.

On appelle $A(2 ; 0)$ et $B(0 ; 2)$ les points d'intersection de la droite \mathcal{D} avec les axes du repère. La distance minimale entre O et la droite \mathcal{D} est OH où H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB isocèle rectangle en O . Ce point H est donc aussi le milieu de $[AB]$. On en déduit les coordonnées du point H .

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1 - u_n) \end{cases}$$
 où pour tout n , u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n .

1. $u_1 = 0,9u_0(1 - u_0) = 0,9 \times 0,3 \times (1 - 0,3) = 0,189$; le nombre de tortues en 2001 est 189.
 $u_2 = 0,9u_1(1 - u_1) = 0,9 \times 0,189 \times (1 - 0,189) \approx 0,138$; le nombre de tortues en 2001 est 138.
2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0 ; 1]$.
 - a. On sait que $0 \leq 1 - u_n \leq 1$; on multiplie les trois membres de cette inégalité par le nombre u_n de l'intervalle $[0 ; 1]$, donc qui est positif ou nul : $0 \leq u_n(1 - u_n) \leq u_n$.
D'où on déduit en multipliant par 0,9 l'inégalité $0 \leq 0,9u_n(1 - u_n) \leq 0,9u_n$ c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$, pour tout n .
 - b. On sait que, pour tout n , $u_n \in [0 ; 1]$; donc $u_n \geq 0$.
Soit \mathcal{P}_n la propriété : $u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.

- **Initialisation**

Pour $n = 0$: $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$ donc $u_0 \leq 0,3 \times 0,9^0$.
La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

On suppose que, pour $n \geq 0$, la propriété \mathcal{P}_n est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.
On va démontrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

D'après la question précédente : $u_{n+1} \leq 0,9u_n$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.

On déduit : $u_{n+1} \leq 0,9 \times 0,3 \times 0,9^n$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq 0,3 \times 0,9^{n+1}$.

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$ donc elle est héréditaire.

• **Conclusion**

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour $n = 0$, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, on peut donc dire que la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc démontré par récurrence que, pour tout n , $u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$, et on a donc par conséquence : $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.

- c. $-1 < 0,9 < 1$ donc la suite géométrique $(0,9^n)$ a pour limite 0;

on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$.

On sait que, pour tout n , $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Cela signifie que cette population de tortues est en voie d'extinction.

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues, c'est-à-dire 0,03 millier de tortues.

On complète l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence :

Variab les :	u est un réel n est un entier naturel
Traite ment :	u prend la valeur 0,3 n prend la valeur 0 Tant que $u \geq 0,03$ faire : n prend la valeur $n + 1$ u prend la valeur $0,9u(1 - u)$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher $2000 + (n - 1)$

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06v_n(1 - v_n) \end{cases}$$

où pour tout $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. $v_{11} = 1,06v_{10}(1 - v_{10}) = 1,06 \times 0,032(1 - 0,032) \approx 0,033$; il y aura donc 33 tortues en 2011.

$v_{12} = 1,06v_{11}(1 - v_{11}) = 1,06 \times 0,033(1 - 0,033) \approx 0,034$; il y aura donc 34 tortues en 2012.

2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente vers ℓ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - v_n) =$

$1 - \ell$; on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,06v_n(1 - v_n) = 1,06\ell(1 - \ell)$.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Comme $v_{n+1} = 1,06v_n(1 - v_n)$, d'après l'unicité de la limite, on peut dire que $\ell = 1,06\ell(1 - \ell)$.

3. La suite (v_n) est croissante et $v_{10} = 0,032$ ce qui signifie qu'il y a 32 tortues en 2010.

Donc, pour tout $n \geq 10$, $v_n \geq v_0$ autrement dit $v_n \geq 0,032$.

Il y aura donc au moins 32 tortues pour toute année au delà de 2010, donc cette population de tortues n'est plus en voie d'extinction.