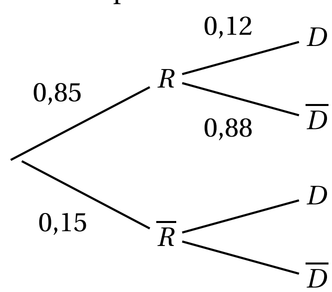
Corrigé du baccalauréat S Polynésie septembre 2002

EXERCICE 1

1. On peut dresser un arbre pondéré de probabilités :



On a donc
- On a $p(R) = 0,85$;
- On a $p(D) = 0,2$;
- On a $p_R(D) = 0,12$.

2. **a.** On a $p(R \cap D) = p(R) \times p_R(D) = 0,85 \times 0,12 = 0,102$.

   b. $p\left(R \cap \overline{D}\right) = (R) \times p_R\left(\overline{D}\right) = 0,85 \times (1 - 0,12) = 0,85 \times 0,88 = 0,748$.

   c. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(D) = p(R \cap D) + p\left(\overline{R} \cap D\right) \iff 0,2 = 0,102 + p\left(\overline{R} \cap D\right) \iff p\left(\overline{R} \cap D\right) =$
   $0,2 - 0,102 = 0,098$.

   d. Les évènements $D \cap R$, $D \cap \overline{R}$, $R \cap \overline{D}$, et $\overline{R} \cap \overline{D}$ constituent une partition de l'ensemble des dossiers, d'où :
   $p\left(\overline{R} \cap \overline{D}\right) = 1 - p(D \cap R) - p\left(D \cap \overline{R}\right) - p\left(R \cap \overline{D}\right) = 1 - (0,102 + 0,098 + 0,748) = 0,052$.

   e. $p_D(R) = \dfrac{p(R \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,102}{0,2} = 0,51$.

3. Soit E l'évènement : « le dossier correspond à un excès de vitesse ».
   On a $p(E) = 0,6$ et $p_E(D) = 0,4$.

   a. On a $p(E \cap D) = p(E) \times p_E(D) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.

   b. Le nombre de dossiers est assez grand pour que l'on puisse considérer que la probabilité de tirer un dossier correspondant à un excès de vitesse et entraînant des frais de dommages corporels est toujours égale à $0,24$. La variable aléatoire égale au nombre de dossiers correspondant à un excès de vitesse et entraînant des frais de dommages corporels suit donc une loi de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,24$.

   La probabilité qu'il n'y ait aucun dossier correspondant à un excès de vitesse et entraînant des frais de dommages corporels est égale à $(1 - 0,24)^5 = 0,76^5$, donc la probabilité qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels est :
   $1 - 0,76^5 \approx 0,746$.

EXERCICE 2

Partie A

1. $\left\{\begin{array}{rcl} z_1\sqrt{3}-z_2 &=& -2\\ z_1-z_2\sqrt{3} &=& -2\mathrm{i}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z_1\sqrt{3}-z_2 &=& -2\\ z_1\sqrt{3}-3z_2 &=& -2\mathrm{i}\sqrt{3}\end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence) $2z_2 = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3} \iff z_2 = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

De la deuxième équation on déduit que :

$z_1 = z_2\sqrt{3}-2\mathrm{i} = -\sqrt{3}+3\mathrm{i}-2\mathrm{i} = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

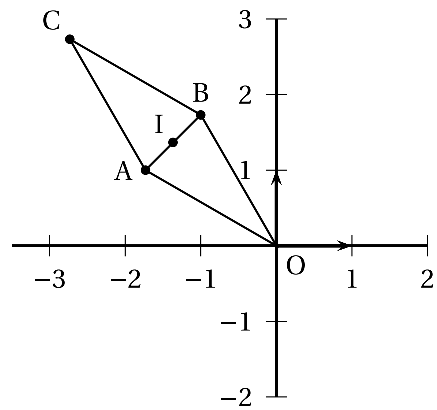
2. On voit que $z_A = z_1$ et $z_B = z_2$.

- On a $|z_A|^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_A| = 2$.

D'où $z_A = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

- De même $|z_B|^2 = 1+3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_B| = 2$.

D'où $z_A = 2\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.



3. - $\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right| = \dfrac{|z_A|}{|z_B|} = \dfrac{2}{2} = 1 = \dfrac{\text{OA}}{\text{OB}}$.

- $\text{mod}\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right) = \text{mod} z_A - \text{mod} z_B = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

$1 = \dfrac{\text{OA}}{\text{OB}} \to$ OA = OB : le triangle OAB est isocèle en O et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

4. Si ACBO est un losange, ACBO est un parallélogramme donc [AB] et [OC] ont le même milieu I, ou encore C est le symétrique de O autour de I qui a pour affixe $\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

L'affixe de C est égale au double de l'affixe de ce milieu soit $-\sqrt{3}-1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

- L'aire du losange est le double de l'aire du triangle AOB soit $2\times\dfrac{1}{2}\text{AB}\times\text{OI} = \text{AB}\times\text{OI}$.

$\text{AB}^2 = \left(-\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3} = 8$. Donc $\text{AB} = 2\sqrt{2}$

$\text{OI}^2 = \left(\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \dfrac{3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}}{4} = 2$. Donc $\text{OI} = \sqrt{2}$.

L'aire de ACBO est donc égale à $2\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 4$ unités d'aire. L'unité d'aire est égale à $4\times 4 = 16$ cm^2, donc l'aire de ACBO est égale à 32 cm^2.

Partie B

$$z' = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}z.$$

1. f est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.
2. • $z_{A'} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\times 2\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = z_B$.
   • $z_{B'} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\times 2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$.
   • On a vu que $z_C = -\sqrt{3}-1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+1\right) = \left(\sqrt{3}+1\right)(-1+\mathrm{i}) =$
   $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.
   Donc $z_{C'} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\times\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}$.
3. La rotation est une isométrie (elle conserve les longueurs, donc les aires).

L'aire de A$'$B$'$C$'$est égale à 16 cm^2.

PROBLÈME

Partie A - Étude d'une fonction

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1},$$

1. Pour tout réel$x$:
   $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{\mathrm{e}^{-2x}+1}$ soit en multipliant chaque terme par e^{2x} :
   $f(-x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = -\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = -f(x)$: la fonction f est impaire.
2. • Calculons : $f(x)+1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}+1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1+\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} > 0$ comme quotient de deux termes supérieurs à zéro.Donc pour tout réel x, $f(x) > -1$.
   • Calculons de même : $f(x)-1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}-1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1-\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \dfrac{-2}{\mathrm{e}^{2x}+1} < 0$ car le dénominateur est positif.
   $f(x)-1 < 0 \iff f(x) < 1$.
   f est minorée par -1 et majorée par 1.
3. • On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = -1$. Ce résultat signifie que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à Γ au voisinage de moins l'infini.
   • En multipliant chaque terme par e^{-2x}, on peut écrire $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$. Ce résultat signifie que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à Γ au voisinage de plus l'infini.
4. La fonction f est dérivable comme quotients de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas et sur $\mathbb{R}$,

$f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)-2\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} = \dfrac{4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} > 0$, car quotient de termes supérieurs à zéro.

Conclusion f est strictement croissante de -1 à 1.

f étant continue sur $\mathbb{R}$ de -1 à 1, s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires une fois, en α tel que $f(\alpha) = 0$.

Or $f(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{2x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{2x} = 1 \iff 2x = \ln 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0$.

Conclusion :

$f(x) < 0$, pour $x < 0$;

$f(0) = 0$;

$f(x) > 0$, pour $x > 0$.

5. **a.** f étant continue sur $\mathbb{R}$ de -1 à 1, f prend la valeur $\alpha \in]-1 ; 1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires une fois , en x_0 tel que

$f(x_0) = \alpha$.

On a donc $f(x_0) = \alpha \iff \dfrac{\mathrm{e}^{2x_0}-1}{\mathrm{e}^{2x_0}+1} = \alpha \iff \mathrm{e}^{2x_0} - 1 = \alpha\left(\mathrm{e}^{2x_0}+1\right) \iff \mathrm{e}^{2x_0}(1-\alpha) = 1+\alpha \iff \mathrm{e}^{2x_0} = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$ car $\alpha \neq 1$.

Donc $2x_0 = \ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$ et enfin $x_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$.

b. Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a donc $x_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3} \approx 0,549$ soit 0,55 au centième près.

Partie B - Tangentes à la courbe

1. $M(x~;~y) \in \Delta_1 \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$. Or $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{4}{4} = 1$. D'où :

$M(x~;~y) \in \Delta_1 \iff y = x$.

2. Soit $1 - f^2(t) = 1 - \left(\dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{\mathrm{e}^{2t}+1}\right)^2 = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{2t}-1\right)^2}{\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)^2} = \dfrac{4\mathrm{e}^{2t}}{\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)^2} = f'(t)$.

On a vu que $-1 < f(t) < 1$, donc $0 \leqslant f(t) < 1$, puis $0 \leqslant [f(t)]^2 < 1$,

$-1 < -[f(t)]^2 \leqslant 0$ et enfin $0 < 1 - [f(t)]^2 \leqslant 1$.

Finalement $0 < f'(t) \leqslant 1$.

La dérivée est supérieure à zéro (on le savait fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$), mais est majorée par 1 valeur atteinte comme on l'a vu en 0.

3. On vient de voir que $0 < f'(t) \leqslant 1$,donc par encadrement d'intégrales de fonctions positives sur l'intervalle $[0~;~x]$, avec $x \geqslant 0$,

$\displaystyle\int_0^x 0\,\mathrm{d}t < \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}t$, soit : $0 < \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant x$.

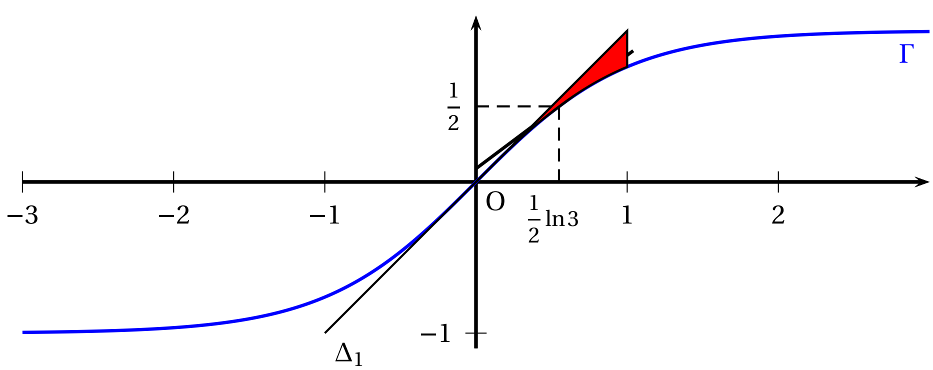
Mais on sait que la fonction f est l'intégrale de sa dérivée sur l'intervalle $[0~;~x]$ qui s'annule en $x = 0$, donc $\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x)$ et l'encadrement précédent devient $0 < f(x) \leqslant x$.

On en déduit que $f(x) - x \leqslant 0$ ce qui signifie que Γ est au dessous de Δ_1 sauf pour $x = 0$ où les deux courbes ont un point commun.

4. On a $f\left(x_A\right) = \frac{1}{2}$.
   On sait que $f'\left(x_A\right) = 1 - \left(f\left(x_A\right)\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
   $M(x\,;\,y) \in \Delta_2 \iff y - f\left(x_A\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - x_A\right)$.
   Or on a démontré à la question 5. b. que la solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ est le nombre $x_0 = \frac{1}{2}\ln 3$.
   L'équation est donc :
   $M(x\,;\,y) \in \Delta_2 \iff y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\ln 3\right) \iff y = \frac{4\mathrm{e}x}{(\mathrm{e}+1)^2} + \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1} - \frac{2\mathrm{e}}{(\mathrm{e}+1)^2}$.
   Finalement $M(x\,;\,y) \in \Delta_2 \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\ln 3$.

5. Il faut résoudre l'équation $f'(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} = \frac{1}{2} \iff 8\mathrm{e}^{2x} = \left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2 \iff 8\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{4x} + 2\mathrm{e}^{2x} + 1 \iff \mathrm{e}^{4x} - 6\mathrm{e}^{2x} + 1 = 0$.
   Posons $X = \mathrm{e}^{2x} > 0$; l'équation devient $X^2 - 6X + 1 = 0$
   On a $\delta = 36 - 4 = 32 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 > 0$; il y a deux solutions :
   $X_1 = \mathrm{e}^{2x_1} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ et $X_2 = 3 - 2\sqrt{2} = \mathrm{e}^{2x_2}$ qui n'a pas de solution.
   $\mathrm{e}^{2x_1} = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x_1 = \ln\left(3+2\sqrt{2}\right) \iff x_1 = \frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$.
   Or $3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$, donc finalement :
   $x_1 = \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.
   Pour calculer l'image de ce nombre on utilise la relation : $1 - f(t)]^2 = f'(t)$.
   $f\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2 = 1 - f'\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; donc $f\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.



Partie C - Calcul d'intégrales

1. En multipliant chaque terme de $f(x)$ par e^{-x}, on obtient $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$.
   En posant $u(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$, on a $u'(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$. Donc $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. On reconnaît la dérivée de $\ln|u(x)| = \ln u(x)$, car $u(x)$ est la somme de deux termes supérieurs à zéro.

Conclusion : $\ln u(x)$ est une primive de $f(x)$.

2. On a vu que pour $x > 0$, donc en particulier sur $[0\,;\,1]$, $f(x) \geqslant 0$, donc l'aire de la surface comprise entre Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale (en unités d'aire) à $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

On a vu que pour $x > 0$ la courbe est sous la droite d'équation $y = x$, donc l'aire en unité d'aire de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x - f(x)\right]\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1 =$$

$$\frac{1^2}{2} - \ln\left(\mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{-1}\right) - \frac{0^2}{2} + \ln\left(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-0}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) + \ln 2 = \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right).$$

L'unité d'aire étant égale à 16 cm^2, l'aire demandée est égale à

$8 + 16\ln 2 - 16\ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right)$.

Voir la surface hachurée plus haut.

3. On a vu que pour tout réel x, $[f(x)]^2 = 1 - f'(x)$, donc :

$$\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - f'(x)\right)\mathrm{d}x = [x - f(x)]_0^1 = 1 - f(1) - 0 + f(0) = 1 - f(1) = 1 - \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} =$$

$$\frac{\mathrm{e}^2 + 1 - \mathrm{e}^2 + 1}{\mathrm{e}^2 + 1} = \frac{2}{\mathrm{e}^2 + 1}$$

4. Toujours en utilisant la relation entre f et f' :

$$\int_0^1 x\left(1 - [f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = f'(x)$, on a :

$u'(x) = 1$ et $v(x) = f(x)$. Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[0\,;\,1]$; on peut donc intégrer par parties :

$\displaystyle\int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, soit en utilisant le résultant de la question C. 1. :

$$\int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x = [x f(x)]_0^1 - \left[\ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}} - \ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) - 0 + \ln 2 = \frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}} -$$

$$\ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) - \ln\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}} - \ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \ln\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}\right).$$

- Il suit :

$$\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x[1 - f(x)^2]\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}\right) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}\right).$$