Corrigé du baccalauréat S Polynésie spécialité septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** On traduit la définition géométrique :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}},\ t \in \mathbb{R}$, soit
$\left\{\begin{array}{rcl} x-8 &=& 2t\\ y-0 &=& 3t\\ z-8 &=& 2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 8+2t\\ y &=& 3t\\ z &=& 8+2t\end{array}\right.\quad t \in \mathbb{R}$

   b. $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{d}\,(3\,;\,2\,;\,-2)$ et Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}\,(2\,;\,3\,;\,2)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux droites ne sont pas parallèles.
Si les deux droites sont coplanaires, elles sont donc sécantes en un point tel que :
$\left\{\begin{array}{rcl} -5+3s &=& 8+2t\\ 1+2s &=& 3t\\ -2s &=& 8+2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3s-2t &=& 10\\ 2s-3t &=& -1\\ s &=& -4-t\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} -12-3t-2t &=& 10\\ -8-2t-3t &=& -1\\ s &=& -4-t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -\frac{22}{5} &=& t\\ -\frac{7}{5} &=& t\\ s &=& -4-t\end{array}\right..$
Ce système n'a pas de solution, donc les droites $\mathscr{D}$ et Δ n'étant ni parallèles ni sécantes ne sont pas coplanaires.

2. **a.** On a $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{n} = 3\times 2 + 2\times(-2) - 2\times 1 = 6-4-2 = 0$.
De même $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{n} = 2\times 2 + 3\times(-2) + 2\times 1 = 4-6+2 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$: il est donc normal à ce plan.
On sait qu'une équation de $\mathscr{P}$ est :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x-2y+z+d = 0$.
Il contient Δ, donc en particulier A.
On a donc $\text{A}(8\,;\,0\,;\,8) \in \mathscr{P} \iff 2\times 8 - 2\times 0 + 8 + d = 0 \iff d = -24$.
Une équation de $\mathscr{P}$ est : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x-2y+z+-24 = 0$.

   b. On utilise les équations paramétriques de $\mathscr{D}$.
On a $d(M\,,\mathscr{P}) = \dfrac{|2(-5+3s)-2(1+2s)-2s-24|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{|-10+6s-2-4s-2s-24|}{\sqrt{9}} = \dfrac{36}{3} = 12$.

   c. L'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan $(x\text{O}y)$ est définie par :
$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-2y+z-24 &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-2y-24 &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-12 &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right.$
Cette droite a pour vecteur directeur $(1\,;\,1\,;\,0)$ et contient par exemple le point $(12\,;\,0\,;\,0)$. Une équation paramétrique de cette droite est donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12+t\\ y &=& t\\ z &=& 0\end{array}\right.$$

3. Le point Ω appartient à la perpendiculaire (d_1) à $\mathscr{P}$ contenant C. Cette droite a pour équation :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d_1) \iff \overrightarrow{\mathrm{C}M} = \alpha\vec{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-10 & = & 2\alpha \\ y-1 & = & =-2\alpha \\ z-6 & = & \alpha \end{array}\right.$

On cherche le point $M = \Omega$ tel que $\|\overrightarrow{\mathrm{C}M}\| = 6 \iff \|\overrightarrow{\mathrm{C}M}\|^2 = 36 \iff$
$(2\alpha)^2 + (-2\alpha)^2 + \alpha^2 = 36 \iff$
$9\alpha^2 = 36 \iff \alpha^2 = 4\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$.
Le plan $\mathscr{P}$ partage l'espace en deux demi-espaces :
- celui où $2x - 2y + z - 24 < 0$ et
- celui où $2x - 2y + z - 24 > 0$.
Le point O(0 ; 0 ; 0) vérifie la première inéquation. Le point Ω doit donc vérifier lui aussi $2x - 2y + z - 24 < 0$.
Si $\alpha = 2, x = 10+4 = 14,\ y = 1-4 = -3$ et $z = 6+2 = 8$, donc $28+6+8-24 > 0$, ce qui ne convient pas.
Si $\alpha = -2, x = 10-4 = 6,\ y = 1+4 = 5$ et $z = 6-2 = 4$, donc $12-10+4-24 < 0$ ce qui est correct.
Conclusion : $\Omega(6\,;\,5\,;\,4)$.
L'équation de $\mathscr{S}$ est obtenue en traduisant que $\Omega M^2 = 36 \iff$
$(x-6)^2+(y-5)^2+(z-4)^2 = 36 \iff x^2+y^2+z^2-12x-10y-8z+36+25+16 = 36 \iff x^2+y^2+z^2-12x-10y-8z+41 = 0$.

Exercice 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. p étant premier et supérieur à 3, ne peut être multiple de 3, donc soit $p = 3k+1$, soit $p = 3k+2$, c'est-à-dire $p \equiv 1 \mod 3$ ou $p \equiv 2 \mod 3$ ou encore :

$$p \equiv 1 \mod 3 \text{ ou } p \equiv -1 \mod 3.$$

2. p impair est de la forme $p = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$ et donc :
$p-1 = 2k$ et $p+1 = 2k+2 = 2(k+1)$.
Il en résulte que $(p-1)(p+1) = p^2-1 = 2k \times 2(k+1) = 4k(k+1)$.
D'autre part $p^2 = 4k^2+4k+1 \Rightarrow p^2+1 = 4k2+4k+2 = 2\left(2k^2+2k+1\right)$.
Enfin $p^4-1 = \left(p^-1\right)\left(p^2+1\right) = 4k(k+1)\times 2\left(2k^2+2k+1\right) = 8k(k+1)\left(2k^2+2k+1\right)$.
Or quel que soit k, $k(k+1)$ est pair puisque k et $k+1$ sont consécutifs, donc $k(k+1) = 2\alpha$ et finalement $p^4-1 = 16\alpha\left(2k^2+2k+1\right)$.
n est donc divisible par 16.
3. p est supérieur à 5, donc ne peut être multiple de 5.
Si $p \equiv 1 \mod 5$, $p^2 \equiv 1 \mod 5 \iff p^2-1 \equiv 0 \mod 5 \Rightarrow \left(p^2-1\right)\left(p^2+1\right) \equiv 0 \mod 5 \iff n \equiv 0 \mod 5$.
Si $p \equiv 2 \mod 5$, $p^2 \equiv 4 \mod 5 \iff p^2+1 \equiv 0 \mod 5 \Rightarrow \left(p^2-1\right)\left(p^2+1\right) \equiv 0 \mod 5 \iff n \equiv 0 \mod 5$.
Si $p \equiv 3 \mod 5$, $p^2 \equiv 4 \mod 5 \iff p^2+1 \equiv 0 \mod 5 \Rightarrow \left(p^2-1\right)\left(p^2+1\right) \equiv 0 \mod 5 \iff n \equiv 0 \mod 5$.
Si $p \equiv 4 \mod 5$, $p^2 \equiv 1 \mod 5 \iff p^2-1 \equiv 0 \mod 5 \Rightarrow \left(p^2-1\right)\left(p^2+1\right) \equiv 0 \mod 5 \iff n \equiv 0 \mod 5$.
Dans tous les cas n est un multiple de 5.
4. **a.** Question de cours classique
   b. On a vu que n est multiple de 3, de 16 et de 5 qui sont premiers entre eux, donc n est multiple de $3 \times 16 \times 5 = 240$.

5. On peut écrire :
$A = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4 = \left(p_1^4 - 1\right) + \left(p_2^4 - 1\right) + \ldots + \left(p_{15}^4 - 1\right) + 15.$
D'après la question précédente chacun des nombres $n_i = p_i^4 - 1$ est multiple de 240, donc en particulier de 15.
Donc A multiple de 15 n'est pas premier.

Problème **10 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. On a pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x \times x \ln x + 1$.
On sait que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

b. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - 2\ln x) = -\infty$, donc par produit des limites :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

2. a. On calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.
$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x)}{x} = \dfrac{1}{2}x(3 - 2\ln x) = \dfrac{3}{2}x - x\ln x$
Comme $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.
Conclusion f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

b. Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x \times x \ln x + 1$, donc f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$f'(x) = x(3 - 2\ln x) + \dfrac{x^2}{2} \times \left(-\dfrac{2}{x}\right) = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\ln x.$

3. $f'(x) = 2x(1 - \ln x)$ qui est du signe de $1 - \ln x$.
On a $f'(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff \ln x < \ln \mathrm{e} \iff x < \mathrm{e}$;
$f'(x) < 0 \iff 1 - \ln x < 0 \iff \ln x > \ln \mathrm{e} \iff x > \mathrm{e}$
$f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}$. D'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	$1 + \frac{\mathrm{e}^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

4. D'après ce tableau de variations l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution α sur $[0\,;\,+\infty[$.
La calculatrice donne $f(4,6) > 0$ et $f(4,7) < 0$, donc $4,6 < \alpha < 4,7$.
$f(4,69) > 0$ et $f(4,70) < 0$, donc $4,69 < \alpha < 4,70$.

Partie B

1. On a vu que $f'(x) = 2x - 2x\ln x$, donc $f'(1) = 2$. De plus $f(1) = \dfrac{5}{2}$.

Une équation de $\mathcal{D}$ est donc :

$M(x\,;\,y) \in \mathcal{D} \iff y - \dfrac{5}{2} = 2(x-1) \iff y = 2x + \dfrac{1}{2}$.

2. a. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$g'(x) = f'(x) - 2 = 2x - 2x\ln x - 2$.

La fonction g' est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

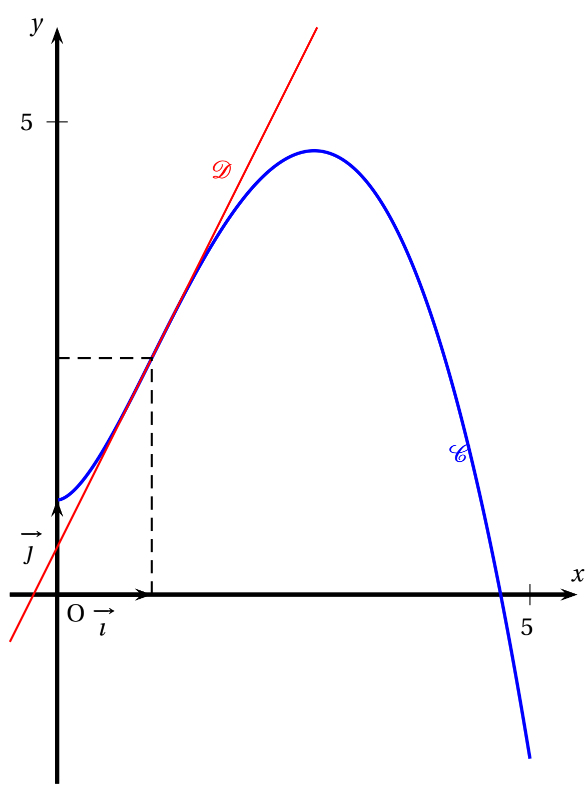
$g''(x) = 2 - 2\ln x - 2x \times \dfrac{1}{x} = -2\ln x$.

b. On en déduit les tableaux de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		↗	0	↘	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	

On en déduit que sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ la fonction g est positive, donc la courbe est au dessus de sa tangente et par contre sur $]1\,;\,+\infty[$, la courbe est sous sa tangente $\mathcal{D}$.

3.



Partie C

1. On a $1 \leqslant n \iff 0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.

   On considère sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{n}~;~1\right]$ les fonctions :

   $\left\{\begin{array}{l c l}u'(x) & = & x^2\\ v(x) & = & \ln x\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l c l}u(x) & = & \dfrac{x^3}{3}\\ v'(x) & = & \dfrac{1}{x}\end{array}\right.$

   Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[\dfrac{1}{n}~;~1\right]$ et de dérivées continues sur cet intervalle. On peut donc intégrer par parties.

   $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \dfrac{x^2}{3} = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} =$

   $-\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3n^3}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{9n^3} = \dfrac{\ln n}{3n^3} + \dfrac{1}{9n^3} - \dfrac{1}{9}$.

2. L'unité d'aire étant égale à $2 \times 2 = 4~\text{cm}^2$, l'aire de la surface est égale à l'intégrale :

   $\mathcal{A}_n = 4\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\dfrac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 - 2x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x =$

   $4\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\dfrac{3}{2}x^2 - x^2\ln x - 2x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = 4\left[\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^3}{3}\ln x + \dfrac{x^3}{9} - x^2 + \dfrac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} =$

   $4\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{9} - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n^3} - \dfrac{1}{3n^3}\ln n - \dfrac{1}{9n^3} + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2n}\right) =$

   $\mathcal{A}_n = 4\left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{11}{18n^3} - \dfrac{\ln n}{3n^3}\right)$.

3. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^3} = 0$, on en déduit que

   $$\lim_{n\to+\infty}\mathcal{A}_n = \dfrac{4}{9}$$

   L'aire en cm^2 de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la tangente $\mathcal{D}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\dfrac{4}{9}$.