Corrigé du baccalauréat S Pondichéry avril 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Partie A

1. **a.** On a $AB = |z_B - z_B| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$, ce qui signifie que B est à 1 de A donc appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

   b. On a $\left(\overrightarrow{AF}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_F - z_A}\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, soit
   $\left(\overrightarrow{AF}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + 2k\pi$ et donc
   $\left(\overrightarrow{AF}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Le triangle ABF est isocèle ($AB = AF = 1$) et a un angle au sommet de mesure $\dfrac{\pi}{3}$: il est donc équilatéral.
   Le point B appartient donc à la médiatrice de [AF] et au cercle $(\mathcal{C})$.

2. **a.** On a $z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   $z_E - z_A = 1 + (z_B)^2 - 1 = (z_B)^2 = \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} =$
   $1 + 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   b. Le résultat précédent montre que :
   $z_E - z_A = 3\,(z_B - z_A)$ ou encore
   $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ égalité vectorielle qui montre que E appartient à la droite (AB) et a pour abscisse 3 si le repère choisi est le couple (A, B).

3. On construit E tel que $AE = 3AB$.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. On a $\dfrac{z' - 1}{z - 1} = \dfrac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A}$.
   Un argument de ce quotient est donc simplement $\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM'}\right)$.

2. Si $\overrightarrow{AM'} \neq \overrightarrow{0}$, les points sont alignés si et seulement si l'angle de la question précédente est nul, autrement dit si le quotient $\dfrac{z' - 1}{z - 1}$ est un réel soit puisque $z' - 1 = z^2$, si le quotient $\dfrac{z^2}{z - 1}$ est réel.
   Si $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{0}$, alors $z^2 = 0$, donc $\dfrac{z^2}{z - 1}$ est encore un réel (ici nul).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Partie A

1. La probabilité de tirer une première boule blanche est $\dfrac{n}{n+8}$ et la probabilité de tirer ensuite une deuxième boule blanche est $\dfrac{n-1}{n+7}$.
   La probabilité de tirer deux boules blanches est donc égale à
   $\dfrac{n}{n+8} \times \dfrac{n-1}{n+7} = \dfrac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$.

2. **a.** Comme à la première question, la probabilité de tirer deux boules rouges est égale à : $\dfrac{5}{n+8} \times \dfrac{4}{n+7}$ et la probabilité de tirer deux boules vertes est égale à : $\dfrac{3}{n+8} \times \dfrac{2}{n+7}$.

Les évènements « tirer deux boules blanches », « tirer deux boules rouges », « tirer deux boules vertes » étant incompatibles la probabilité de tirer deux boules de même couleur est égale à :

$\dfrac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)} + \dfrac{5}{n+8} \times \dfrac{4}{n+7} + \dfrac{3}{n+8} \times \dfrac{2}{n+7} = \dfrac{n(n-1)+20+6}{(n+8)(n+7)} = \dfrac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$.

b. Comme $n \geqslant 2$, on peut simplifier par n^2 non nul, donc :

$p(n) = \dfrac{1-\frac{1}{n}+\frac{26}{n^2}}{\left(1+\frac{8}{n}\right)\left(1+\frac{7}{n}\right)}$.

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p(n) = 1$.

Lorsque le nombre de boules devient très grand la probabilité de tirer deux boules de même couleur sera voisine de la probabilité de tirer deux boules blanches soit presque 1 puisqu'il n'y aura pratiquement plus que cette couleur.

Partie B

1. $p(4) = \dfrac{4^2-4+26}{(4+8)(4+7)} = \dfrac{38}{132} = \dfrac{19}{66}$.

2. **a.** Le joueur peut « gagner » :

40 + 40 - 30 = 50 ;

40 + 5 - 30 = 15 ;

$5+5-30 = -20$,

qui sont les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. • La probabilité de tirer deux fois deux boules de même couleur est égale à $\dfrac{19}{66} \times \dfrac{19}{66} = \dfrac{361}{4356} = p(X=50)$.

• La probabilité de tirer deux fois des boules de couleurs différentes est égale à : $\left(1-\dfrac{19}{66}\right) \times \left(1-\dfrac{19}{66}\right) = \left(\dfrac{47}{66}\right)^2 = \dfrac{2209}{4356} = p(X=-20)$.

On a donc $p(X=15) = 1-\left(\dfrac{361}{4356}+\dfrac{2209}{4356}\right) = 1-\dfrac{2570}{4356} = \dfrac{1786}{4356}$.

c. On a donc $\mathrm{E}(X) = 50 \times \dfrac{361}{4356} + 15 \times \dfrac{1786}{4356} - 20 \times \dfrac{2209}{4356} = \dfrac{5}{33}$ (€).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $4^5-1 = 2^{10}-1 = 1023$ et $4^6-1 = 2^{12}-1 = 4095$.

$1023 = 3 \times 11 \times 31$;

$4095 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 3$.

On a donc P. G. C. D.$\left(4^5-1\ ;\ 4^6-1\right) = 3$.

2. $n=0$, donc $u_2 = 5u_1 - 4u_0 = 5$:

$n=2$, donc $u_3 = 5u_2 - 4u_1 = 25-4 = 21$;

$n=3$, donc $u_4 = 5u_3 - 4u_2 = 105-20 = 85$.

3. **a.** Démonstration par récurrence :

- Initialisation :

$u_1 = 1 = 4u_0 + 1 = 0 + 1$: la relation est vraie au rang 0.

- Hérédité :

Supposons que pour n naturel on ait : $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

On a $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n = 5u_{n+1} + 1 - u_{n+1} = 4u_{n+1} + 1$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$. On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel n :

$u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b. D'après la relation de récurrence précédente, on part d'un naturel qu'on multiplie par le naturel 4 et on ajoute ensuite le naturel 1. La somme est un naturel ainsi que tous les autres termes.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.

a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

PROBLÈME **11 points**

La partie **B** peut être traitée indépendamment de la partie **A**.

Partie A

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \mathrm{e}^x = 1$ et par quotient de limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = 0$.

b. En multipliant chaque terme par e^{-x}, on obtient $f_0(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par quotient de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = 1$.

c. Les résultats montrent montrent que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_0$ au voisinage de moins l'infini et que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini.

2. Posons $X = x$ et $Y = y - \frac{1}{2}$ soit $x = X$ et $y = Y + \frac{1}{2}$, d'où en remplaçant l'équation $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$, on obtient $Y + \frac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^X}{1 + \mathrm{e}^X}$ soit $Y = \dfrac{\mathrm{e}^X}{1 + \mathrm{e}^X} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\mathrm{e}^X - 1 - \mathrm{e}^X}{1 + \mathrm{e}^X} = \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{\mathrm{e}^X + 1}$.

On a $Y(-X) = \dfrac{\mathrm{e}^{-X} - 1}{\mathrm{e}^{-X} + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^X}{1 + \mathrm{e}^X}$ (en multipliant chaque terme par e^X) $= \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{\mathrm{e}^X + 1} = -\dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{\mathrm{e}^X + 1} = -Y(X)$, ce qui montre la symétrie de $\mathscr{C}_0$ autour du point K.

3. Quotient de fonctions dérivables le dénominateur supérieur ou égal à 1 étant non nul, f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f_0'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2}$.

Quotient de deux termes supérieur à zéro cette dérivée est supérieure à zéro : la fonction f_0 est donc strictement croissante de 0 à 1 (limites respectives en $-$ et $+$ l'infini).

4. **a.** Une équation est $y - f_0(0) = f_0'(0)(x-0)$.

On a $f_0(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ et $f_0'(0) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$, d'où l'équation :

$y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}x$ ou $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

b. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\right) =$

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4\mathrm{e}^x - x - x\mathrm{e}^x - 2 - 2\mathrm{e}^x}{4(1+\mathrm{e}^x)} = \dfrac{2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - x - 2}{4(1+\mathrm{e}^x)}$

Comme $4(1+\mathrm{e}^x) > 0$ quel que soit le réel x, le signe de cette différence est le signe du numérateur $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - x - 2$.

c. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1$;

$g''(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$ qui est du signe de $-x$

d. Donc $g''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_-$;

g' est donc croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g'(x) = -1$; $g'(0) = 1 - 1 = 0$; enfin comme $g'(x) = \mathrm{e}^x(1-x) - 1$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g'(x) = -\infty$.

$g'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

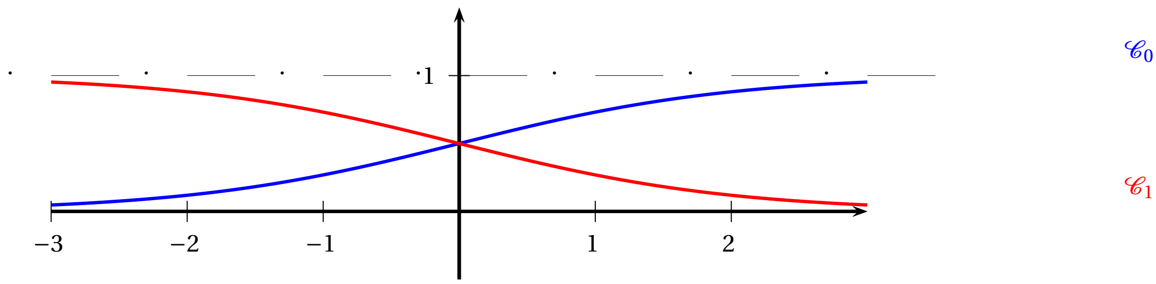
Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$;

$g(0) = 2 - 2 = 0$;

et comme la fonction g est décroissante $g(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

e. Le résultat précédent montre que g est positive sur $\mathbb{R}_-$, c'est-à-dire que $\mathscr{C}_0$ est au dessus de T sur $\mathbb{R}_-$ et en dessous sur $\mathbb{R}_+$ avec un point de contact par définition en 0.

5.



6. **a.** On a $M\left(x\,;\,\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)$ et $M'\left(x\,;\,\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)$.

Or $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right] = \dfrac{1}{2}\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{2}$: ceci montre que les points M et M' sont symétriques autour de la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

b. D'après le résultat précédent $\mathscr{C}_1$ est la symétrique de $\mathscr{C}_0$ autour de l'horizontale (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ (voir le tracé ci-dessus).

Partie B

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$: le numérateur étant la dérivée du dénominateur, on a :

$u_0 = [\ln(1+\mathrm{e}^x)]_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln(1+1) = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

2. $u_0 + u_1 = 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1.$

Donc $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

3. Quel que soit le naturel n, f_n quotient de termes supérieurs à zéro est un nombre supérieur à zéro ; les intégrales de ces fonctions positives sur l'intervalle $[0 ; 1]$ sont donc des nombres supérieurs à zéro.

4. a. Quel que soit le réel x, $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) =$

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{(n+1)x}(1+\mathrm{e}^x)} - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}(1+\mathrm{e}^x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}(1+\mathrm{e}^x)} - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}(1+\mathrm{e}^x)} = \frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}(1+\mathrm{e}^x)}.$$

b. Le dénominateur est supérieur à zéro comme produit de deux nombres supérieurs à zéro ; le signe de $k(x)$ est donc celui du numérateur $1 - \mathrm{e}^x$.

$1 - \mathrm{e}^x > 0 \iff 1 > \mathrm{e}^x \iff 0 > x$; $k(x) > 0$ si $x < 0$;

$1 - \mathrm{e}^x < 0 \iff 1 < \mathrm{e}^x \iff 0 < x$; $k(x) < 0$ si $x > 0$.

$k(x) = 0 \iff x = 0$.

c. D'après la question précédente l'intervalle d'intégration ne contient que des valeurs positives, donc $k(x) < 0$, ce qui signifie que la suite $\left(f_n\right)$, donc aussi (u) est décroissante.

5. a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_{n-1} + u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{(n-1)x}(1+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}(1+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}(1+\mathrm{e}^x)} + \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}(1+\mathrm{e}^x)}\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{nx}(1+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{(1-n)x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1-n}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^{(1-n)} - 1}{1-n} = \frac{1-\mathrm{e}^{-(n-1)}}{n-1}.$$

b. Avec $n = 3$, la relation précédente donne :

$$u_2 + u_1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-(3-1)}}{3-1} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2}, \text{ soit } u_2 = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2} - u_1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2} - 1 + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right).$$

6. a. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b. On a démontré que la suite (u) est décroissante,donc pour n supérieur ou égal à 2, soit

$u_n < u_{n-1} \Rightarrow u_n + u_n < u_{n-1} + u_n \Rightarrow u_n < \dfrac{u_{n-1}+u_n}{2}$, soit $u_n < v_n$.

c. D'après la question précédente la suite (u_n) positive est majorée par une suite positive qui a pour limite 0 en plus l'infini. D'après le théorème des gendarmes la suite (u_n) converge elle aussi vers 0.