

☞ Corrigé du baccalauréat S Pondichéry avril 2000 ☞

EXERCICE 1

4 points

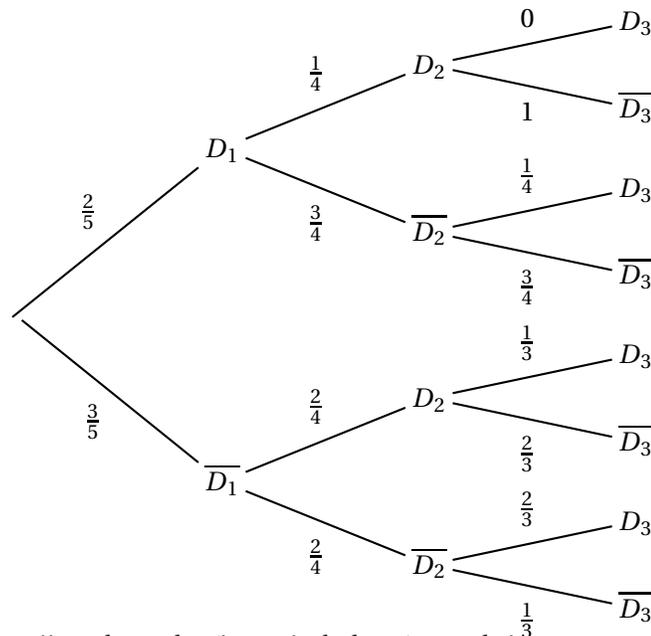
Commun à tous les candidats

- On a bien sûr $p(D_1) = \frac{2}{5}$.
- Si la clef numéro 1 n'a pas ouvert la porte il reste une clef défectueuse sur les quatre encore à essayer, donc

$$p_{D_1}(D_2) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{On a } p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \times p_{D_1}(D_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

3.



En suivant la septième branche (à partir du haut), on obtient :

$$p(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap D_3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

4. a. En suivant la troisième branche

$$P(2; 4) = p(\overline{D_1} \cap D_2 \cap \overline{D_3} \cap D_4 \cap \overline{D_5}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{10} = 0,1$$

- b. Si les clefs qui n'ouvrent pas sont les deux dernières, c'est que les trois premières ouvrent, donc :

$$P(4; 5) = p(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}.$$

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

- On a $|z_1|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} [(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2] = \frac{1}{4} [2(\sqrt{3}-1)^2] = \frac{2}{4} (\sqrt{3}-1)^2.$

$$\text{Donc } |z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1).$$

On peut écrire en factorisant ce module :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) (\cos -\frac{\pi}{4} + i \sin -\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

2. On sait que l'écriture complexe de la rotation est $z \mapsto ze^{i\frac{\pi}{2}}$ ou simplement $z \mapsto iz$.

$$\text{Donc } z_2 = iz_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) e^{-i\frac{\pi}{4}} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\text{Donc } |z_2| = |z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) \text{ et un argument de } z_2 \text{ est } \frac{\pi}{4}.$$

Comme un argument est égal à $\frac{\pi}{4}$ la partie réelle est égale à la partie soit $x = y$ imaginaire, soit $x = -y$. Donc M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y = x$.

3. a. Par définition de l'homothétie, on a $z' = (\sqrt{3} + 2)z$.

$$\text{Donc } z_3 = (\sqrt{3} + 2)z_2 = (\sqrt{3} + 2) \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) e^{i\frac{\pi}{4}} \right] =$$

$$(\sqrt{3} + 2) \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} (1 + i).$$

$$\text{b. On a } BM_1^2 = \left| \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) - i \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right|^2 = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4} =$$

$$\frac{+3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}}{4} = \frac{8}{4} = 2, \text{ donc } BM_1 = \sqrt{2}.$$

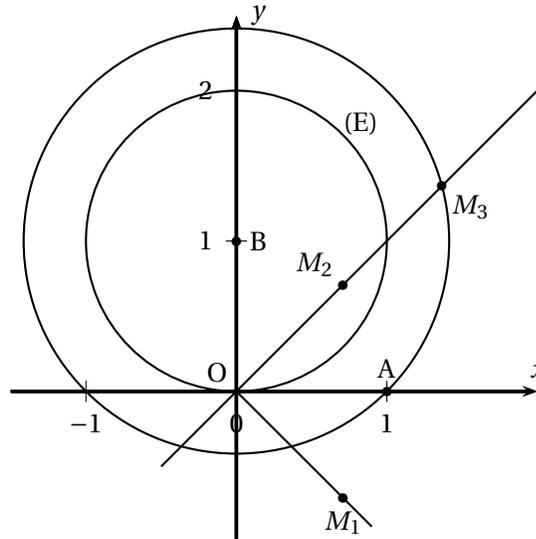
$$BM_3^2 = \left| \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i) - i \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{3}+1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right|^2 = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4} + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4} = \frac{+3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{4} =$$

$$\frac{8}{4} = 2, \text{ donc } BM_3 = \sqrt{2}.$$

Les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

4. Soit A le point d'affixe 1. le triangle OAB est rectangle isocèle et $AB = \sqrt{2}$. On a donc le rayon du cercle de centre qui contient les points M_1 et M_3 . Le point M_1 est sur la bissectrice des axes d'équation $y = -x$ et M_3 sur la bissectrice des axes d'équation $y = x$.

Enfin M_2 est lui aussi sur la première bissectrice et tel que $OM_2 = OM_1$.



5. On a $OM' = |Z| = \left| \frac{1}{i-z} \right| = \frac{1}{|i-z|} = \frac{1}{BM}$.

Donc $OM' = 1 \iff \frac{1}{BM} = 1 \iff BM = 1$.

L'ensemble (E) est donc le cercle de centre B et de rayon 1.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. a.

n	1	2	3	4	5	6
3^n	3	9	27	81	243	729
reste	3	2	6	4	5	1

b. $3^{n+6} - 3^n = 3^n \times 3^6 - 3^n = 3^n (3^6 - 1) = 3^n (729 - 1) = 728 \times 3^n$.

Or $72 = 700 + 28 = 7 \times 100 + 7 \times 4 = 7 \times (100 + 4) = 7 \times 104$.

728 et par conséquent $3^{n+6} - 3^n$ est multiple de 7 pour tout naturel.

c. On a $1000 = 6 \times 166 + 4$, donc d'après le résultat précédent les nombres $3^{1000}, 3^{1000-6}, 3^{1000-2 \times 6}, \dots, 3^{1000-6 \times 166}$ ont le même reste dans la division par 7.

Mais $3^{1000-6 \times 166} = 3^4$ qui a d'après la première question comme reste 4.

d. Pour n quelconque : $n = 6n' + r$ avec $0 \leq r \leq 5$; le reste de la division de n par 7 est le même que le reste de la division par de 3^r par 7

Si $r = 0$, le reste de la division par 7 est le même que le reste de la division par 7 de 3^6 , soit d'après la première question : 1. Or 1 est le reste de la division de 3^0 par 7.

Dans tous les cas le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque est égal au reste de la division par de 3^r où r est le reste de la division euclidienne de n par 6.

e. D'après les résultats a. et d., pour $n \neq 0$,

$$3^n = 7q + r, \text{ avec } 1 \leq r \leq 6.$$

3^n n'est donc pas multiple de 7 qui est premier, donc 3^n est premier avec 7.

2. Soit

a. U_n est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3, donc :

$$U_n = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Comme U_n est une somme d'entiers, c'est un entier, donc $3^n - 1$ est multiple de 2. $3^n - 1 = 2U_n$. Donc si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

b. D'après le calcul précédent, si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors $2U_n$ est aussi divisible par 7; mais 7 et 2 sont des entiers premiers, donc premiers entre eux; d'après le théorème de Gauss U_n est divisible par 7.

On a vu que quand U_n est multiple de 7, $3^n - 1$ l'est aussi; ceci est réalisé quand le reste de la division de 3^n par 7 est égal à 1, donc si n est un multiple de 6.

Dernier exemple du tableau $3^6 - 1 = 729 - 1 = 728 = 7 \times 104$.

PROBLÈME

11 points

Partie A

★ Étude de la fonction $g : x \mapsto \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$

Soit la fonction g définie sur $] -3 ; 3[$ par : $g(x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$.

1. Sur $] -3 ; 3[$, $g(-x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = \ln(3-x) - \ln(3+x) = -[\ln(3+x) - \ln(3-x)] = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = g(x)$: la fonction g est paire sur l'intervalle $] -3 ; 3[$.

2. a. On a $\lim_{x \rightarrow -3} (3-x) = 6$ et $\lim_{x \rightarrow -3} (3+x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -\infty$.

De même $\lim_{x \rightarrow 3} (3-x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (3+x) = 6$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty$.

b. Sur $]0 ; 3[$, g est dérivable et en posant : $\frac{3+x}{3-x} = u$

$$g'(x) = \frac{u'}{u}$$

$$\text{Or } u'(x) = \frac{3-x + (3+x)}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}.$$

$$\text{D'où } g'(x) = \frac{\frac{6}{(3-x)^2}}{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{6}{(3+x)(3-x)} = \frac{6}{9-x^2}.$$

$$\text{Or } -3 < x < 3 \Rightarrow 0 < x^2 < 9 \iff 9 - x^2 > 0.$$

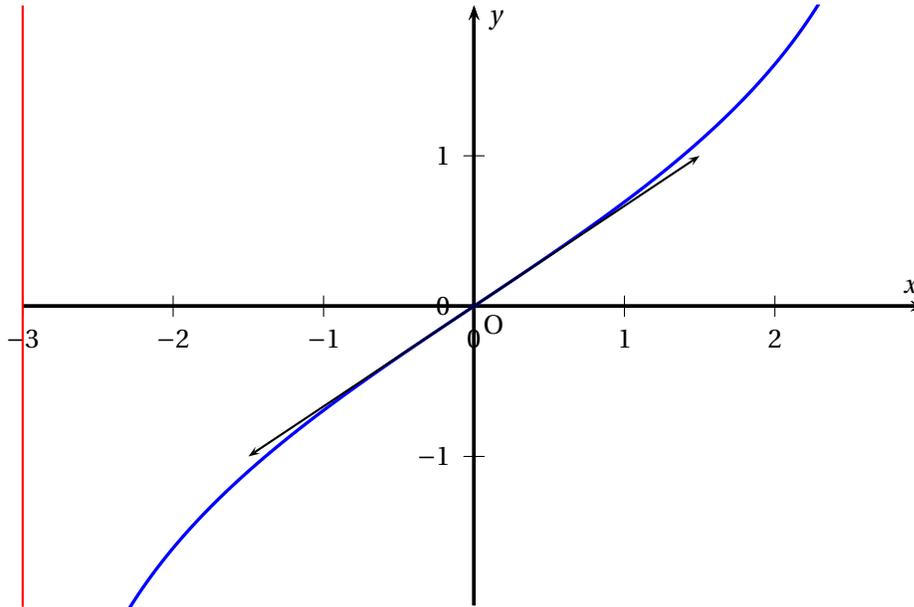
La dérivée quotient de termes positifs est positive : la fonction g est croissante de moins l'infini à plus l'infini et $f(0) = \ln \frac{3}{3} = \ln 1 = 0$.

3. a. Une équation de (T) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0 est :

$y - g(0) = g'(0)(x - 0)$; comme $g'(0) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, l'équation s'écrit :

$y - 0 = \frac{2}{3}(x - 0)$ soit $y = \frac{2}{3}x$.

b.



4. D'après les variations de g , on a $g(x) < 0$ sur $] -3 ; 0[$, $g(x) > 0$ sur $]0 ; 3[$ et $g(0) = 0$.

5. a. Si $h(x) = xg(x)$, alors $h'(x) = g(x) + xg'(x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) + \frac{6x}{(3+x)(3-x)}$.

b. L'aire en unité d'aire de la portion de plan délimitée par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

$$\int_0^1 g(x) dx, \quad \text{car sur } [0 ; 1], g(x) \geq 0$$

Or d'après la question 5. a. : $[xg]'(x) = g(x) + xg'(x)$ ou $g(x) = [xg]'(x) - xg'(x) = [xg]'(x) - \frac{6x}{9-x^2}$.

Or $\frac{-6x}{9-x^2} = 3 \times \frac{-2x}{9-x^2}$ qui est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ qui est la dérivée de $3 \ln(9-x^2)$.

Finalement $g(x)$ est donc égale à la différence de deux dérivées ou encore à la dérivée de la différence et on peut donc calculer

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 [(xg(x)) - (3 \ln(9-x^2))] - (dx = [xg(x) + 3 \ln(9-x^2)]_0^1 = \ln 2 + 3 \ln 8 - 3 \ln 9 = \ln 2 + 9 \ln 2 - 6 \ln 3 = 10 \ln 2 - 6 \ln 3.$$

L'unité étant égale à 4 cm sur chaque axe, l'unité d'aire est égale à $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$.

L'aire en cm^2 de la portion de plan délimitée par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est donc égale à

$$16(10 \ln 2 - 6 \ln 3) \approx 5,44 \text{ cm}^2.$$

Partie B

★ Étude d'une courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = t(3-t^2) \\ y(t) = tg(t) \end{cases} \text{ pour } t \in [-2; 2].$$

où g désigne la fonction étudiée dans la partie A. On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.

1. a. $x(-t) = -t(3 - (-t)^2) = -t(3 - t^2) = -x(t)$: x est impaire.
 $y(-t) = -tg(-t) = tg(t) = y(t)$: y est paire.
 - b. Les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont la même ordonnée et des abscisses opposées : ils sont donc symétriques autour de l'axe des ordonnées qui est un axe de symétrie de (Γ) .
2. x est dérivable et sur $[-2; 2]$, $x'(t) = 3 - (t)^2 - 2t \times t = 3 - 3t^2 = 3(1 - t^2) = 3(1 + t)(1 - t)$ qui est du signe de $(1 + t)(1 - t)$:
 - si $t \in]-1; 1[$, $(1 + t)(1 - t) > 0$ et $x'(t) > 0$; la fonction x est croissante sur $]-1; 1[$;
 - si $t \notin]-1; 1[$, $(1 + t)(1 - t) < 0$ et $x'(t) < 0$; la fonction x est décroissante sur $]-2; -1[$ et sur $]1; 2]$.
3. y est dérivable sur $]-2; 2[$ et sur cet intervalle :
 $y'(t) = g(t) + tg'(t) = g(t) + \frac{6t}{9-t^2}$.
 Sur $]-2; 2[$, $9 - t^2 > 0$; le signe de $y'(t)$ dépend donc de t et de $g(t)$.
 On a vu dans la partie A que pour $t < 0$, $g(t) < 0$ et comme $\frac{6t}{9-t^2} < 0$, on a $y'(t) < 0$ sur $]-2; 0[$.
 De même si $t > 0$, on a vu que $g(t) > 0$ et comme $\frac{6t}{9-t^2} > 0$, on a $y'(t) > 0$ sur $]0; 2]$.
 y est donc décroissante sur $]-2; 0[$ et croissante sur $]0; 2]$.
4. On peut donc dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $[0; 2]$:

x	0	1	2
$x'(t)$	+	0	-
$x(t)$			
$y(t)$			
$y'(t)$	0	+	

$$5. x(t) = 0 \Leftrightarrow t(3 - t^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 3 - t^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{3} \text{ ou} \\ t = -\sqrt{3} \end{cases}$$

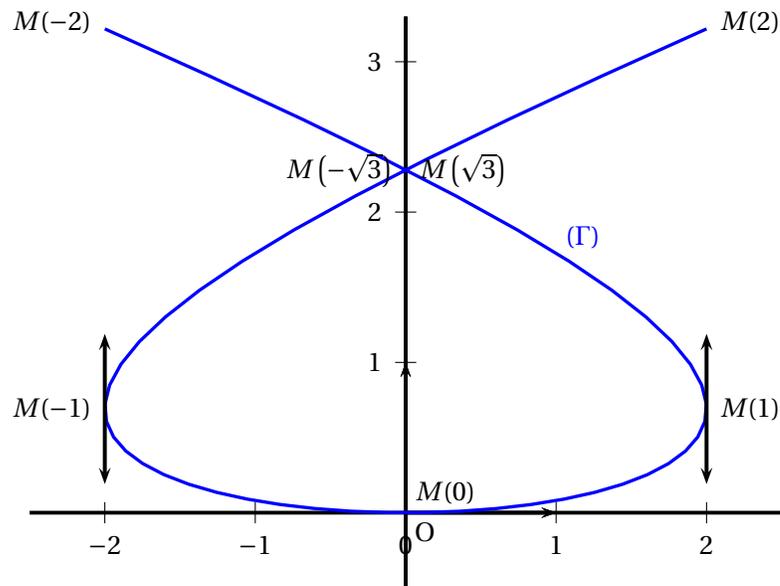
On a $M(0)(0; 0)$; $M(\sqrt{3})(\sqrt{3}; y(\sqrt{3}))$.

$$\text{Or } y(\sqrt{3}) = \sqrt{3}g(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \times \ln\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} \ln\left(\frac{(3 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}\right) = \sqrt{3} \ln\left(\frac{9 + 3 + 6\sqrt{3}}{9 - 3}\right) = \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Donc $M(\sqrt{3})(\sqrt{3}; \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}))$.

Enfin $M(-\sqrt{3})(-\sqrt{3}; \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}))$ car ce point et le précédent sont symétriques autour de l'axe des ordonnées.

6. a. Voir la figure avec $M(1)(2; \ln 2)$.



b. En $M(0)$ le vecteur directeur de la tangente a pour coordonnées $(3; 0)$ et en $M(1)$ le vecteur directeur a pour coordonnées $(0; \ln 2 + \frac{3}{4})$.

c. Voir ci-dessus.