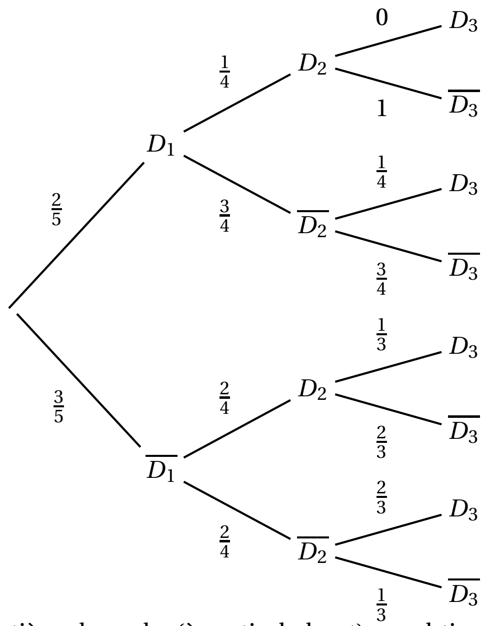
Corrigé du baccalauréat S Pondichéry juin 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a bien sûr $p\left(D_1\right) = \dfrac{2}{5}$.
2. Si la clef numéro 1 n'a pas ouvert la porte il reste une clef défectueuse sur les quatre encore à essayer, donc
   $p_{D_1}\left(D_2\right) = \dfrac{1}{4}$.
   On a $p\left(D_1 \cap D_2\right) = p\left(D_1\right) \times p_{D_1}\left(D_2\right) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$.
3.



   En suivant la septième branche (à partir du haut), on obtient :
   $p\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap D_3\right) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2$.
4. **a.** En suivant la troisième branche
   $P(2\,;\,4) = p\left(\overline{D_1} \cap D_2 \cap \overline{D_3} \cap D_4 \cap \overline{D_5}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3\times2\times2\times1}{5\times4\times3} = \frac{1}{10} = 0,1$

   b. Si les clefs qui n'ouvrent pas sont les deux dernières, c'est que les trois premières ouvrent, donc :
   $P(4\,;\,5) = p\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \dfrac{1}{10}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. On a $|z_1|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left[\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2\right] = \dfrac{1}{4}\left[2\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right] =$
   $\dfrac{2}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.
   Donc $|z_1| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$.
   On peut écrire en factorisant ce module :
   $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\cos -\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

2. On sait que l'écriture complexe de la rotation est $z \longmapsto z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ ou simplement $z \longmapsto \mathrm{i}z$.

Donc $z_2 = \mathrm{i}z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right] = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Donc $|z_2| = |z_1| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ et un argument de z_2 est $\dfrac{\pi}{4}$.

Comme un argument est égal à $\dfrac{\pi}{4}$ la partie réelle est égale à la partie soit $x = y$ imaginaire, soit $x = y$. Donc M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y = x$.

3. a. Par définition de l'homothétie, on a $z' = \left(\sqrt{3}+2\right)z$.

Donc $z_3 = \left(\sqrt{3}+2\right)z_2 = \left(\sqrt{3}+2\right)\times\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right] =$

$\left(\sqrt{3}+2\right)\times\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$.

b. On a $\mathrm{B}M_1^2 = \left|\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\mathrm{i})-\mathrm{i}\right|^2 = \left|\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right|^2 = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}+\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4} =$

$\dfrac{+3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$, donc $\mathrm{B}M_1 = \sqrt{2}$.

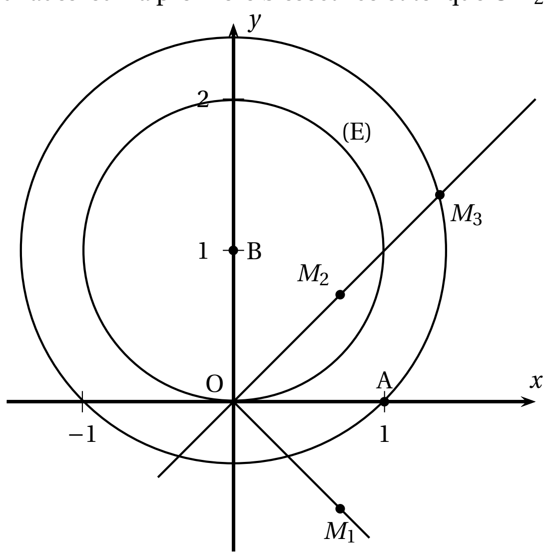
$\mathrm{B}M_3^2 = \left|\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(1+\mathrm{i})-\mathrm{i}\right|^2 = \left|\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right|^2 = \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}+\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4} =$

$\dfrac{+3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$, donc $\mathrm{B}M_3 = \sqrt{2}$.

Les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

4. Soit A le point d'affixe 1. le triangle OAB est rectangle isocèle et $\mathrm{AB} = \sqrt{2}$. On a donc le rayon du cercle de centre qui contient les points M_1 et M_3. Le point M_1 est sur la bissectrice des axes d'équation $y = -x$ et M_3 sur la bissectrice des axes d'équation $y = x$.

Enfin M_2 est lui aussi sur la première bissectrice et tel que $\mathrm{O}M_2 = \mathrm{O}M_1$.



5. On a $\mathrm{O}M' = |Z| = \left|\dfrac{1}{\mathrm{i}-z}\right| = \dfrac{1}{|\mathrm{i}-z|} = \dfrac{1}{\mathrm{B}M}$.

Donc $\mathrm{O}M' = 1 \iff \dfrac{1}{\mathrm{B}M} = 1 \iff \mathrm{B}M = 1$.

L'ensemble (E) est donc le cercle de centre B et de rayon 1.

EXERCICE 2 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. **a.**

n	1	2	3	4	5	6
3^n	3	9	27	81	243	729
reste	3	2	6	4	5	1

b. $3^{n+6} - 3^n = 3^n \times 3^6 - 3^n = 3^n\left(3^6 - 1\right) = 3^n(729 - 1) = 728 \times 3^n$.

Or $72 = 700 + 28 = 7 \times 100 + 7 \times 4 = 7 \times (100 + 4) = 7 \times 104$.

728 et par conséquent $3^{n+6} - 3^n$ est multiple de 7 pout tout naturel.

c. On a $1\,000 = 6 \times 166 + 4$, donc d'après le résultat précédent les nombres $3^{1\,000}, 3^{1\,000-6}, 3^{1\,000-2\times 6}, \dots, 3^{1\,000-6\times 166}$ ont le même reste dans la division par 7.

Mais $3^{1\,000-6\times 166} = 3^4$ qui a d'après la première question comme reste 4.

d. Pour n quelconque : $n = 6n' + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant 5$; le reste de la division de n par 7 est le même que le reste de la division par de 3^r par 7

Si $r = 0$, le reste de la division par 7 est le même que le reste de la division par 7 de 3^6, soit d'après la première question : 1. Or 1 est le reste de la division de 3^0 par 7.

Dans tous les cas le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque est égal au reste de la division par de 3^r où r est le reste de la division euclidienne de n par 6.

e. D'après les résultats a. et d., pour $n \neq 0$,

$3^n = 7q + r$, avec $1 \leqslant r \leqslant 6$.

3^n n'est donc pas multiple de 7 qui est premier, donc 3^n est premier avec 7.

2. Soit

a. U_n est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3, donc :

$U_n = \dfrac{3^n -}{3-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Comme U_n est une somme d'entiers, c'est un entier, donc $3^n - 1$ est multiple de 2.

$3^n - 1 = 2U_n$. Donc si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

b. D'après le calcul précédent, si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors $2U_n$ est aussi divisible par 7 ; mais 7 et 2 sont des entiers premiers, donc premiers entre eux ; d'après le théorème de Gauss U_n est divisible par 7.

On a vu que quand U_n est multiple de 7, $3^n - 1$ l'est aussi ; ceci est réalisé quand le reste de la division de 3^n par 7 est égal à 1, donc si n est un multiple de 6.

Dernier exemple du tableau $3^6 - 1 = 729 - 1 = 728 = 7 \times 104$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

$\star$ Étude de la fonction $g\ :\ x \longmapsto \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

Soit la fonction g définie sur $]-3~;~3[$ par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$.

1. Sur $]-3\,;\,3[$, $g(-x) = \ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right) = \ln(3-x) - \ln(3+x) = -\left[\ln(3+x) - \ln(3-x)\right] = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right) = g(x)$: la fonction g est paire sur l'intervalle $]-3\,;\,3[$.

2. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to -3}(3-x) = 6$ et $\displaystyle\lim_{x\to -3} 3+x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to -3} g(x) = -\infty$.
De même $\displaystyle\lim_{x\to 3}(3-x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to -3}(3+x) = 6$, donc $\displaystyle\lim_{x\to -3} g(x) = +\infty$.

b. Sur $[0\,;3[$, g est dérivable et en posant : $\dfrac{3+x}{3-x} = u$

$g'(x) = \dfrac{u'}{u}$

Or $u'(x) = \dfrac{3-x+(3+x)}{(3-x)^2} = -\dfrac{6}{(3-x)^2}$.

D'où $g'(x) = \dfrac{dfrac6(3-x)^2}{\frac{3+x}{3-x}} = \dfrac{6}{(3+x)(3-x)} = \dfrac{6}{9-x^2}$.

Or $-3 < x < 3 \Rightarrow 0 < x^2 < 9 \iff 9 - x^2 > 0$.

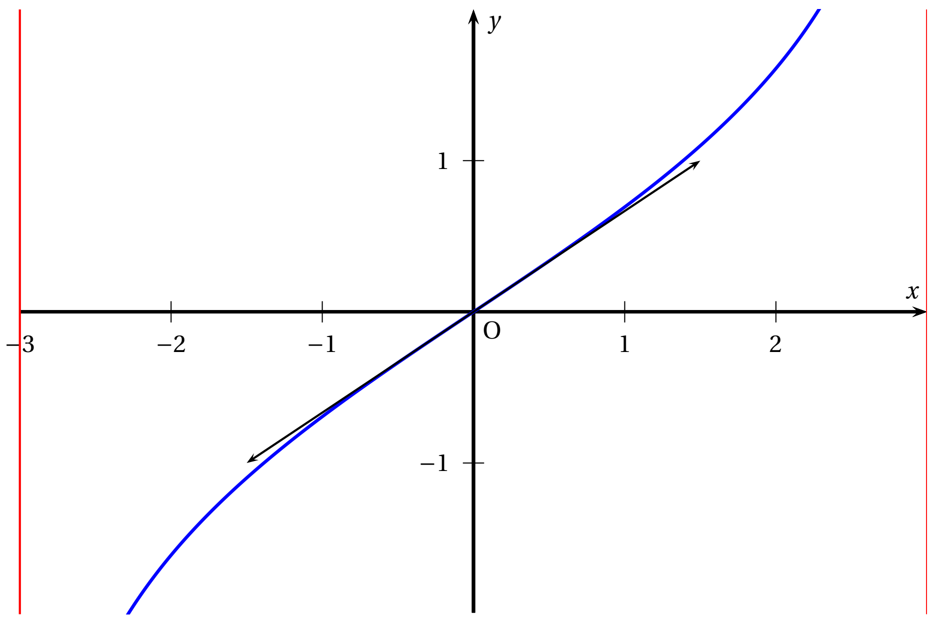
La dérivée quotient de termes positifs est positive : la fonction g est croissante de moins l'infini à plus l'infini et $f(0) = \ln\frac{3}{3} = \ln 1 = 0$.

3. **a.** Une équation de (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 est :

$y - g(0) = g'(0)(x-0)$; comme $g'(0) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$, l'équation s'écrit :

$y - 0 = \dfrac{2}{3}(x-0)$ soit $y = \dfrac{2}{3}x$.

b.



4. D'après les variations de g, on a $g(x) < 0$ sur $]-3\,;\,0[$, $g(x) > 0$ sur $]0\,;\,3[$ et $g(0) = 0$.

5. **a.** Si $h(x) = xg(x)$, alors $h'(x) = g(x) + xg'(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right) + \dfrac{6x}{(3+x)(3-x)}$.

b. L'aire en unité d'aire de la portion de plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{car sur } [0\,;\,1],\ g(x) \geqslant 0$$

Or d'après la question 5. a. : $[xg]'(x) = g(x) + xg'(x)$ ou $g(x) = [xg]'(x) - xg'(x) = [xg]'(x) - \dfrac{6x}{9-x^2}$.
Or $\dfrac{-6x}{9-x^2} = 3\times\dfrac{-2x}{9-x^2}$ qui est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui est la dérivée de $3\ln\left(9-x^2\right)$.
Finalement $g(x)$ est donc égale à la différence de deux dérivées ou encore à la dérivée de la différence et on peut donc calculer
$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[(xg(x)) - \left(3\ln\left(9-x^2\right)\right)\right] - (\mathrm{d}x = \left[xg(x) + 3\ln\left(9-x^2\right)\right]_0^1 =$
$\ln 2 + 3\ln 8 - 3\ln 9 = \ln 2 + 9\ln 2 - 6\ln 3 = 10\ln 2 - 6\ln 3$.
L'unité étant égale à 4 cm sur chaque axe, l'unité d'aire est égale à $4\times 4 = 16$ cm^2.
L'aire en cm^2 de la portion de plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est donc égale à
$16(10\ln 2 - 3\ln 3) \approx 5,44$ cm^2.

Partie B

$\star$ Étude d'une courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{l c l}x(t) &=& t\left(3-t^2\right)\\ y(t) &=& tg(t)\end{array}\right. \qquad \text{pour} \quad t\in[-2~;~2].$$

où g désigne la fonction étudiée dans la partie A. On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t)~;~y(t))$.

1. a. $x(-t) = -t\left(3-(-t)^2\right) = -t\left(3-t^2\right) = -x(t)$: x est impaire.
$y(-t) = -tg(-t) = tg(t) = y(t)$: y est paire.

b. Les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont la même ordonnée et des abscisses opposées : ils sont donc symétriques autour de l'axe des ordonnées qui est un axe de symétrie de (Γ).

2. x est dérivable et sur $[-2~;~2]$, $x'(t) = 3-(t)^2 - 2t\times t = 3-3t^2 = 3\left(1-t^2\right) = 3(1+t)(1-t)$ qui est du signe de $(1+t)(1-t)$:
- si $t\in]-1~;~1[$, $(1+t)(1-t) > 0$ et $x't() > 0$; la fonction x est croissante sur $]-1~;~1[$;
- si $t\notin]-1~;~1[$, $(1+t)(1-t) < 0$ et $x't() > 0$; la fonction x est décroissante sur $]-2~;~-1[$ et sur $]1~;~2]$.

3. y est dérivable sur $]-2~;~2[$ et sur cet intervalle :
$y'(t) = g(t) + tg'(t) = g(t) + \dfrac{6t}{9-t^2}$.
Sur $]-2~;~2[$, $9-t^2 > 0$; le signe de $y'(t)$ dépend donc de t et de $g(t)$.
On a vu dans la partie A que pour $t < 0$, $g(t) < 0$ et comme $\dfrac{6t}{9-t^2} < 0$, on a $y'(t) < 0$ sur $]-2~;~0[$.
De même si $t > 0$, on a vu que $g(t) > 0$ et comme $\dfrac{6t}{9-t^2} > 0$, on a $y'(t) > 0$ sur $]0~;~2]$.
y est donc décroissante sur $]-2~;~0[$ et croissante sur $]0~;~2]$.

4. On peut donc dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $t\longmapsto x(t)$ et $t\longmapsto y(t)$ sur $[0~;~2]$:

x	0		1		2
$x'(t)$		+	0	−	
$x(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	−2
$y(t)$	0		$\nearrow$		$2\ln 5$
$y'(t)$	0		+		

5. $x(t) = 0 \iff t\left(3-t^2\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l c l} t & = & 0\\ 3-t^2 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} t & = & 0\\ t & = & \sqrt{3}\,\text{ou}\\ t & = & -\sqrt{3}\end{array}\right.$

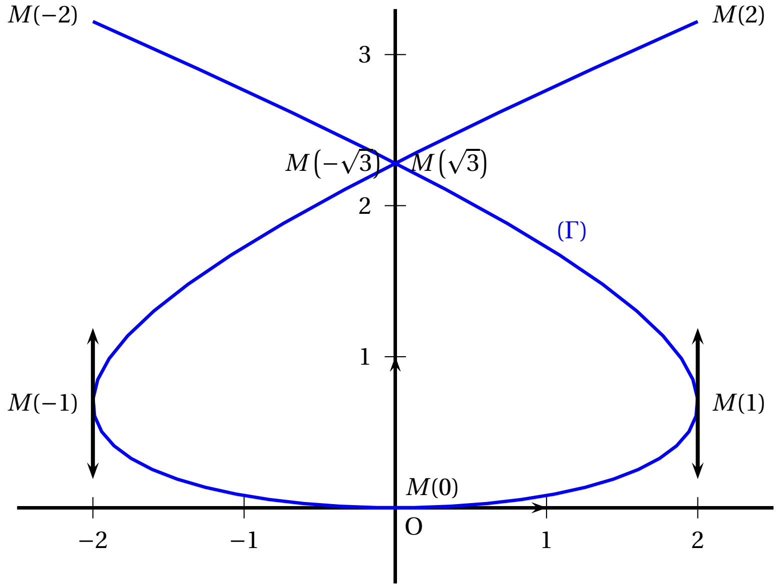
On a $M(0)(0\,;\,0)$; $M\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\,;\,y\left(\sqrt{3}\right)\right)$.

Or $y\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}g\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\times\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\ln\left(\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}\right) = \sqrt{3}\ln\left(\dfrac{9+3+6\sqrt{3}}{9-3}\right) =$ $\sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Donc $M\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$.

Enfin $M\left(-\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$ car ce point et le précédent sont symétriques autour de l'axe des ordonnées.

6. **a.** Voir la figure avec $M(1)(2\,;\,\ln 2)$.



b. En $M(0)$ le vecteur directeur de la tangente a pour coordonnées $(3\,;\,0)$ et en $M(1)$ le vecteur directeur a pour coordonnées $\left(0\,;\,\ln 2+\frac{3}{4}\right)$.

c. Voir ci-dessus.