

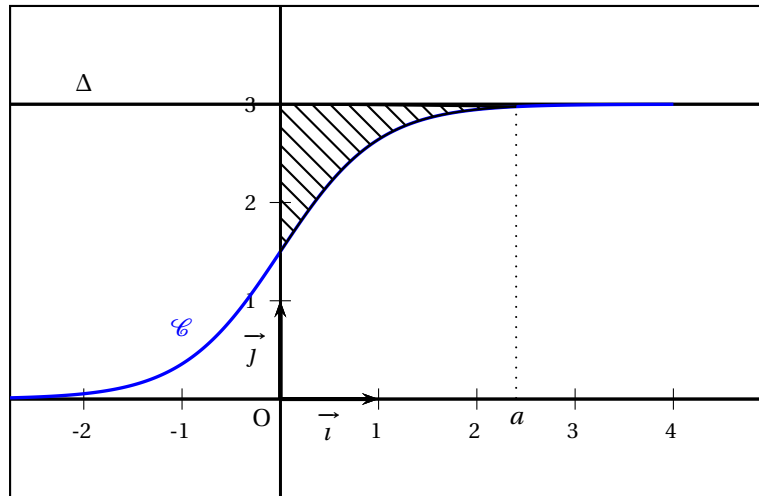
Corrigé du baccalauréat S Pondichéry
17 avril 2015

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A



1. On sait que $e^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x , donc $1 + e^{-2x} > 1 > 0$. Le dénominateur étant non nul, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle la fonction étant de la forme $\frac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1 + e^{-2x}$, donc $u'(x) = -2e^{-2x}$ on a :

$$f'(x) = -\frac{3u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{3 \times (-2)e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2} = \frac{6e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2} > 0$$
car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} (comme le laisse supposer le graphique).
2. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$ et en posant $X = -2x$, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, d'où
 $\lim_{X \rightarrow -\infty} 1 + e^X = 1$ et enfin par quotient de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$: ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est asymptote à \mathcal{C} au voisinage de plus l'infini.
3. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(0) = \frac{3}{1+1} = 1,5$ à 3 : il existe donc un réel unique $\alpha \in [0; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2,999$.
La calculatrice donne :
 $f(4) \approx 2,99899$ et $f(5) \approx 2,9999$, donc $4 < \alpha < 5$;
 $f(4,0) \approx 2,99899$ et $f(4,1) \approx 2,9992$, donc $4,0 < \alpha < 4,1$;
 $f(4,00) \approx 2,99899$ et $f(4,01) \approx 2,99901$, donc $4,00 < \alpha < 4,01$ (encadrement à 10^{-2} près).

Partie B

1. On a vu dans la partie A que $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3 - f(x)$, soit $h(x) > 0$ sur \mathbb{R} .

2. La fonction H est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :

$$H'(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x} + 3 - 3}{1+e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x} + 3}{1+e^{-2x}} - \frac{3}{1+e^{-2x}} = \frac{3(e^{-2x} + 1)}{1+e^{-2x}} - \frac{3}{1+e^{-2x}} = 3 - f(x) = h(x).$$

Donc H est une primitive de h sur \mathbb{R} .

3. a. On a vu que sur \mathbb{R} donc en particulier sur l'intervalle $[0 ; a]$ (avec $a >$), la fonction h est positive, donc l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$ est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de h , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

Mais comme $h(x) = 3 - f(x)$, cette surface est la surface limitée par la droite Δ , la courbe \mathcal{C} et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ (voir l'aire hachurée ci-dessus).

- b. D'après la question B. 2., on a :

$$\int_0^a h(x) dx = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2 \times a}) + \frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2 \times 0}) = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2 \times a}) = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2}{1 + e^{-2a}} \right).$$

- c. D'après la question précédente, on sait que l'aire de \mathcal{D}_a , surface limitée par la droite Δ , la courbe \mathcal{C} et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ est égale à $\frac{3}{2} \ln \left(\frac{2}{1 + e^{-2a}} \right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1 + e^{-2x}} \right) = 2$, donc finalement par composition, l'aire de \mathcal{D} est égale à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2}{1 + e^{-2x}} \right) = \frac{3}{2} \ln 2 \approx 1,04$ (u. a.)

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a pour tout naturel n , $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} =$

$$au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a} = au_n - a \frac{b}{1-a} = a \left[u_n - \frac{b}{1-a} \right] = av_n.$$

L'égalité $v_{n+1} = av_n$, vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) est géométrique de raison a .

2. On sait que $v_n = v_0 \times a^n$; donc si $a \in]-1 ; 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \frac{b}{1-a} = 0 \text{ soit } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{b}{1-a}.$$

Partie B

1. Après la taille la plante mesure $80 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 80 \times \frac{3}{4} = 60$ (cm). Au bout de 1 an elle a poussé de 30 cm; elle mesurera donc en mars 2016 avant la taille $60 + 30 = 90$ cm.

2. a. D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par $\frac{3}{4} = 0,75$ et la pousse annuelle est de 30 cm, donc :

$$h_{n+1} = 0,75h_n + 30.$$

- b. Mars 2015 correspondant à $n = 0$, on a : $h_0 = 80$; $h_1 = 90$,
 $h_2 = 0,75 \times 90 + 30 = 67,5 + 30 = 97,5$: la suite semble être croissante.
Initialisation : on sait déjà que $h_0 < h_1$;
Hérédité : supposons que quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $h_p < h_{p+1}$, alors
 $0,75h_p < 0,75h_{p+1} \iff 0,75h_p + 30 < 0,75h_{p+1} + 30 \iff h_{p+1} < h_{p+2}$
 l'hérédité est démontrée.
 Conclusion : $h_0 < h_1$ et quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $h_p < h_{p+1}$ entraîne
 $h_{p+1} < h_{p+2}$, donc par le principe de récurrence on a démontré que pour
 tout naturel n , $h_n < h_{n+1}$: la suite (h_n) est croissante.
- c. Si la suite (h_n) converge vers ℓ , par continuité l'égalité :
 $h_{p+1} = 0,75h_p + 30$ donne en passant aux limites à l'infini :
 $\ell = 0,75\ell + 30 \iff 0,25\ell = 30 \iff \ell = 120$.
 La plante aura donc une taille inférieure à 120 cm. (À la calculatrice
 $h_{20} \approx 119,873$ cm).
 On utilise le résultat de la partie A avec la suite (h_n) et les coefficients
 $a = 0,75$ et $b = 30$.
 Comme $-1 < 0,75 < 1$, la suite (h_n) converge vers $\frac{b}{1-a} = \frac{30}{1-0,75} = \frac{30}{0,25} =$
 120.

EXERCICE 3**6 points****Commun à tous les candidats****Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment****Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager**

1. a. Par symétrie $P(104 \leq X) = 0,16$ et donc $P(64 \leq X \leq 104) = 1 - 2 \times 0,16 =$
 $1 - 0,32 = 0,68$.
 b. On vient donc de trouver que $P(\mu - 20 \leq X \leq \mu + 20) = 0,68$: donc $\sigma \approx 20$.
2. a. La variable Z est centrée et réduite : elle suit donc une loi normale centrée
 réduite.
 b. On part de $P(X \leq 64) = 0,16$, d'où $P(X \leq 64) = P(X - 84 \leq -20) =$
 $P\left(\frac{X - 84}{\sigma} \leq \frac{-20}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq -\frac{20}{\sigma}\right)$.
 Finalement $P\left(Z \leq -\frac{20}{\sigma}\right) = 0,16$
 c. Le résultat précédent entraîne que $-\frac{20}{\sigma} \approx -0,9945 \iff \sigma \approx \frac{20}{0,9945}$ soit
 $\sigma \approx 20,111$ à 10^{-3} près.
3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
 a. Il faut trouver :
 $P(24 \leq X \leq 60) \approx 0,115$ (calculatrice)
 b. On a $P(X > 120) = 0,5 - P(84 \leq X \leq 120) \approx 0,037$.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

1. a. Si G est la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant pris l'ex-
 tension de garantie, puisque les tirages sont indépendants et de même
 probabilité 0,115, G suit une loi binomiale $\mathcal{B}(12, 0,115)$.
 La probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension
 de garantie est égale à :
 $P(G = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times (1 - 0,115)^9 \approx 0,1114$ soit 0,111 au millième près.

- b. On a $P(G \geq 6) = 1 - P(G \leq 5) \approx 0,001$ au millième près.
2. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
 • Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65
- a. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
 • Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65.
- La variable aléatoire Y prend donc deux valeurs 65 et -334 avec les probabilités respectives 0,885 et 0,115.
- b. On a $E(Y) = 65 \times 0,885 + (-334) \times 0,115 = 19,115 \approx 19,12$ € au centime près. L'offre est donc avantageuse pour l'entreprise puisque celle gagne presque 20 € par client.

EXERCICE 4

5 points

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, $P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$.

1. Voir la figure à la fin.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} . $\overrightarrow{MN} \left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{MP} (0; -1; -2)$.
 Les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.
3. a. $-1 \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \left(\frac{1}{4}\right) \times (-2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
 b. L'algorithme 1 calcule le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.
- 4.
5. a. Si n est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est :
 $5x - 8y + 4z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$;
 $N \in (\text{MNP}) \iff -8 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 = d \iff 0 = d$
 Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc $5x - 8y + 4z = 0$.
- b. On traduit la relation vectorielle : $M(x; y; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{FM} = t\vec{n}, t \in \mathbb{R}$
 soit
- $$\begin{cases} x-1 = 5t \\ y-0 = -8t \\ z-1 = 4t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+5t \\ y = -8t \\ z = 1+4t \end{cases}$$
6. a. Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de Δ , soit :
- $$\begin{cases} 5x - 8y + 4z = 0 \\ x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \Rightarrow 5(1+5t) - 8 \times (-8t) + 4(1+4t) = 0 \iff$$
- $$105t + 9 = 0 \iff t = -\frac{9}{105} \iff t = -\frac{3}{35}.$$
- D'où $x = 1 + 5 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$;

$$y = -8 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = \frac{24}{35};$$

$$z = 1 + 4 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = 1 - \frac{12}{35} = \frac{23}{35}.$$

$$\text{Donc } F\left(\frac{4}{7}; \frac{24}{35}; \frac{23}{35}\right).$$

- b.** Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP , $[FK]$ est hauteur du tétraèdre $MNPF$, donc

$$V_{MNPF} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(MNP \times FK).$$

$$\text{Or } MNP \text{ est rectangle en } M, \text{ donc } \mathcal{A}(MNP) = \frac{MN \times MP}{2}.$$

$$MN^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{21}}{4};$$

$$MP^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow MP = \sqrt{5};$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{4} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{27}{35}} = \frac{1}{24} \times \sqrt{\frac{21 \times 27}{35}} \times \sqrt{5} =$$

$$\frac{1}{24} \times \sqrt{\frac{81}{5}} \times \sqrt{5} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

EXERCICE 4

5 points

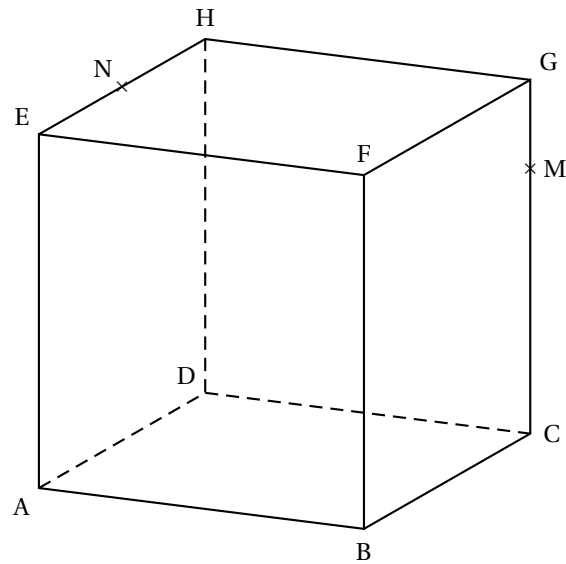
Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Voir le cours.
2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
 - a. Si 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$, comme 3 et 4 sont premiers entre eux, d'après le 1. 12 devrait diviser $2^{33} - 1$ ce qui est contradictoire avec ce que dit l'élève : il a donc tort.
 - b. 2^{33} est un naturel pair donc $2^{33} - 1$ est impair donc 4 ne peut le diviser.
 - c. $2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^3 \equiv (-1)^3 \pmod{3} \Leftrightarrow 2^3 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow (2^3)^{11} \equiv (-1)^{11} \pmod{3} \Leftrightarrow 2^{33} \equiv -1 \pmod{3}$ ce qui montre que 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.
 - d. $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{10}$;
 $2^3 S = 2^3 + 2^4 + (2^3)^3 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{11}$, d'où par différence :

$$7S = (2^3)^{11} - 1 \Leftrightarrow S = \frac{(2^3)^{11} - 1}{7}.$$
 - e. S est une somme d'entiers naturel donc est un entier naturel ; le résultat précédent montre que $(2^3)^{11} - 1$ est donc un multiple de 7.
 Finalement $2^{33} - 1$ est divisible par 7.
3. $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$.
 Ce nombre n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 (dans la division reste 1), ni par 11 (dans la division reste 7), ni par 13 (dans la division reste 10) et comme $13^2 = 169$, il est inutile de continuer : 127 est premier.
4. a. Comme on vient de le voir pour 127, l'algorithme cherche le reste de la division de $2^{33} - 1$ par les naturels 2, 3, 4, etc., $k \leq \sqrt{2^n - 1}$ tant que le reste est non nul.
 On a vu que $2^{33} - 1$ n'était divisible ni par 2 ni par 3, donc ce nombre n'est divisible ni par 4 ni par 6. Il faut regarder s'il est divisible par 5.
 $2^{11} = 2048$ et $2048 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow (2^{11})^3 \equiv 3^3 \pmod{5}$, mais $3^3 = 27 \equiv 2 \pmod{5}$, donc $2^{33} \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 2^{33} - 1 \equiv 1 \pmod{5}$; on en déduit que $2^{33} - 1$ n'est pas divisible par 5.
 On a vu que le nombre $2^{33} - 1$ est divisible par 7, donc l'algorithme va afficher ce diviseur 7 et « CAS 2 ».
 Si on entre $n = 7$, l'algorithme affiche 12 et « CAS 1 ».
- b. Le CAS 2 concerne donc les nombres de Mersenne non premiers et le nombre k est le plus petit de ses diviseurs (différent de 1).
- c. Le CAS 1 concerne les nombres de Mersenne premiers comme $2^7 - 1$.

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



P ×

Algorithme 1

```

Saisir  $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$ 
 $d$  prend la valeur  $x_N - x_M$ 
 $e$  prend la valeur  $y_N - y_M$ 
 $f$  prend la valeur  $z_N - z_M$ 
 $g$  prend la valeur  $x_P - x_M$ 
 $h$  prend la valeur  $y_P - y_M$ 
 $i$  prend la valeur  $z_P - z_M$ 
 $k$  prend la valeur  $d \times g + e \times h + f \times i$ 
Afficher  $k$ 

```

Algorithme 2 (à compléter)

```

Saisir  $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$ 
 $d$  prend la valeur  $x_N - x_M$ 
 $e$  prend la valeur  $y_N - y_M$ 
 $f$  prend la valeur  $z_N - z_M$ 
 $g$  prend la valeur  $x_P - x_M$ 
 $h$  prend la valeur  $y_P - y_M$ 
 $i$  prend la valeur  $z_P - z_M$ 
 $k$  prend la valeur  $d \times g + e \times h + f \times i$ 
 $l$  prend la valeur  $d^2 + e^2 + f^2$ 
 $m$  prend la valeur  $g^2 + h^2 + i^2$ 
Si  $k = 0$  et si  $l = m$ 
    Afficher : « Le triangle MNP
est rectangle isocèle en M »
Sinon Afficher : « Le triangle MNP
n'est pas rectangle ou n'est pas iso-
cèle en M »

```