Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2002

EXERCICE 1

1. **a.** On a pour $n \geqslant 1$, $\quad v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{5-6}{3\times 5} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{-1}{15} = \dfrac{1}{6}\left(u_n - \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{1}{6}v_n$.

   L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{1}{6}v_n$ vraie pour $n \geqslant 1$, montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$. Son premier terme est

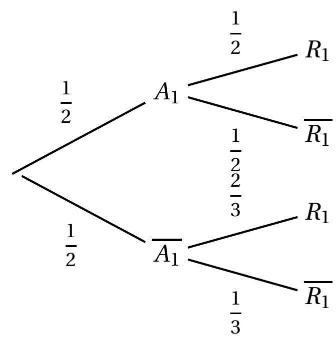
   $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{5-4}{10} = \dfrac{1}{10}$.

   b. On sait que $v_n = v_1 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{6^{n-1}}$.

   Or $v_n = u_n - \dfrac{2}{5} \iff u_n = v_n + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{6^{n-1}} + \dfrac{2}{5}$, pour $n \geqslant 1$.

2. **a.** On a $a_1 = \dfrac{1}{2}$ puisque l'on choisit au départ l'un des deux dés au hasard

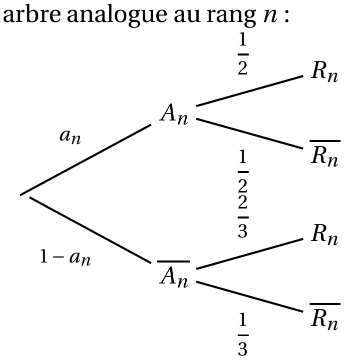
   b.



   On a donc, d'après la loi des probabilités totales :

   $r_1 = p(R_1) = p(A_1 \cap R_1) + p\left(\overline{A_1} \cap R_1\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+4}{3\times 4} = \dfrac{7}{12}$.

   c. On peut dresser un arbre analogue au rang n :



   On a donc $r_n = p(R_n) = p(A_n \cap R_n) + p\left(\overline{A_n} \cap R_n\right) = a_n \times \dfrac{1}{2} + (1-a_n) \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}a_n - \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3}$.

   d. À la partie $(n+1)$, on utilise le dé A si :
   - on l'a utilisé à la partie n et qu'on a obtenu rouge
   - ou si on a utilisé le dé B à la partie n et que l'on a obtenu blanc.

   On a donc pour tout $n \geqslant 1$,

   $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) + \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$

e. D'après la question précédente :
$a_{n+1} = p\left(A_{n+1}\right) = p\left(A_n \cap R_n\right) + p\left(\overline{A_n} + \overline{R_n}\right)$, soit :
$a_{n+1} = p\left(A_n\right) \times p_{A_n}\left(R_n\right) + p_{\overline{A_n}}\left(\overline{R_n}\right) = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}\left(1 - a_n\right)$.
Finalement $a_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{3}$.
On a donc $a_n = u_n$ vue à la question 1. Donc

$$a_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}.$$

f. D'après le résultat des questions 2. c. et 2. e., on a donc pour $n \geqslant 1$:
$r_n = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{5}\right) + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{60}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} - \dfrac{1}{15} + \dfrac{2}{3} =$
$-\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} + \dfrac{-1+10}{15} = -\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} + \dfrac{9}{15} = -\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} + \dfrac{3}{5}$.
Comme $-1 < \dfrac{1}{6} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} = 0$, donc finalement
$\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \dfrac{3}{5} = 0,6 = 60\,\%$.

EXERCICE 2
Enseignement obligatoire

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}.$$

1. On a $|z_{\text{A}}|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow |z_{\text{A}}| = \sqrt{2}$. En factorisant ce module :
$z_{\text{A}} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
On a $|z_{\text{B}}|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow |z_{\text{B}}| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En factorisant ce module :
$z_{\text{B}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \text{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$.

2. a. $\text{e}^{\text{i}2\alpha} - 1 = \cos 2\alpha + \text{i}\sin 2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha + \text{i}\sin 2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha + \text{i}\sin 2\alpha =$
$-2\sin^2\alpha + 2\text{i}\sin\alpha\cos\alpha = 2\text{i}\sin\alpha(\cos\alpha + \text{i}\sin\alpha) = 2\text{i}\sin\alpha\,\text{e}^{\text{i}\alpha}$.

b. On a $M\text{A} = |z_{\text{A}} - z_M| = \left|\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} - \text{e}^{\text{i}\alpha}\right|$ et
$M\text{B} = |z_{\text{B}} - z_M| = \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}} - \text{e}^{\text{i}\alpha}\right|$.
On a donc $f(M) = M\text{A} \times M\text{B} = \left|\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} - \text{e}^{\text{i}\alpha}\right| \times \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}} - \text{e}^{\text{i}\alpha}\right| =$
$\left|\left(\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} - \text{e}^{\text{i}\alpha}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}} - \text{e}^{\text{i}\alpha}\right)\right| = \left|\text{e}^{\text{i}\pi} - \text{e}^{\text{i}2\alpha} - \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)}\right|$

c. D'après le résultat de la question 2. a. :
$f(M) = \left|\text{e}^{\text{i}2\alpha} - 1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}\right)\text{e}^{\text{i}\alpha}\right| = \left|2\text{i}\text{e}^{\text{i}\alpha}\sin\alpha - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}\right)\text{e}^{\text{i}\alpha}\right| =$
$\left|\text{e}^{\text{i}\alpha}\right|\left|2\text{i}\sin\alpha - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$, car $\left|\text{e}^{\text{i}\alpha}\right| = 1$.

3. a. $f(M)^2$ est une somme de deux carrés ; elle est minimale puisque $\dfrac{1}{4} > 0$, si
$\left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2 = 0 \iff \sin\alpha = \dfrac{3}{4}$.

On a donc $\cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{7}{16}$, d'où :
$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.
Il y a donc deux points pour lesquels $f(M)$ est minimale :

$$M_1\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\ ;\ \dfrac{3}{4}\right) \quad \text{et} \quad M_2\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\ ;\ \dfrac{3}{4}\right).$$

Pour ces deux points la valeur minimale est $f(M) = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

b. On a successivement :
$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2\sin\alpha \leqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha \leqslant -\dfrac{7}{2} \Rightarrow$
$0 \leqslant \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2 \leqslant \dfrac{49}{4}$.
La valeur maximale de $f(M)$ peut être $\dfrac{49}{4}$. Or
$\left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2 = \dfrac{49}{4} \iff \dfrac{9}{4} + 4\sin^2\alpha - 6\sin\alpha = \dfrac{49}{4} \iff$
$9 + 16\sin^2\alpha - 24\sin\alpha = 49 \iff 16\sin^2\alpha - 24\sin\alpha - 40 = 0 \iff$
$2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha - 5 = 0 \quad (1)$.
En posant $X = \sin\alpha$, l'équation (1) devient :
$2X^2 - 3X - 5 = 0$ qui a une solution -1 évidente : donc :
$2X^2 - 3X - 5 = (X+1)(2X-5)$: l'autre solution est donc $\dfrac{5}{2}$.
On a donc $\sin\alpha = -1 \iff \alpha = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ avec k entier, ou $\sin\alpha = \dfrac{5}{2} = 2,5$ qui n'a pas de solution.
Il y a donc un point pour lequel $f(M)$ est maximale, le point de coordonnées $(0\ ;\ -1)$ et la valeur de ce maximum est $f(M) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 2
Enseignement de spécialité

1. a. La rotation r transforme donc [AC] en [BD], donc l'angle de la rotation est $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
Le centre I de la rotation appartient à $(\mathscr{C}_1)$ puisque [AB] est un diamètre de ce cercle et que par conséquent : $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
De même comme [CD] est un diamètre de $(\mathscr{C}_3)$, le centre I appartient à $(\mathscr{C}_3)$ puisque $\left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

b. r' transforme [AC] en [DB] : un angle de cette rotation est donc :
$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) = -\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. (quart de tour direct)
[CB] est un diamètre de $(\mathscr{C}_2)$, donc $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. J appartient à $(\mathscr{C}_2)$.
De même [AD] un diamètre de $(\mathscr{C}_4)$, donc $\left(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JD}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. J appartient à $(\mathscr{C}_4)$.

c. Par la rotation r l'image du milieu M de [AC] est le milieu du segment image [BD] ; on a donc :
IM = IN et $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Par la rotation r' l'image du milieu M de [AC] est le milieu du segment image [DB] ; on a donc :

$\text{JM} = \text{JN}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{JM}}\,,\,\overrightarrow{\text{JN}}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Les triangles IMN et JMN sont rectangles isocèles d'hypoténuse [MN], donc le quadrilatère INJM est un carré direct.

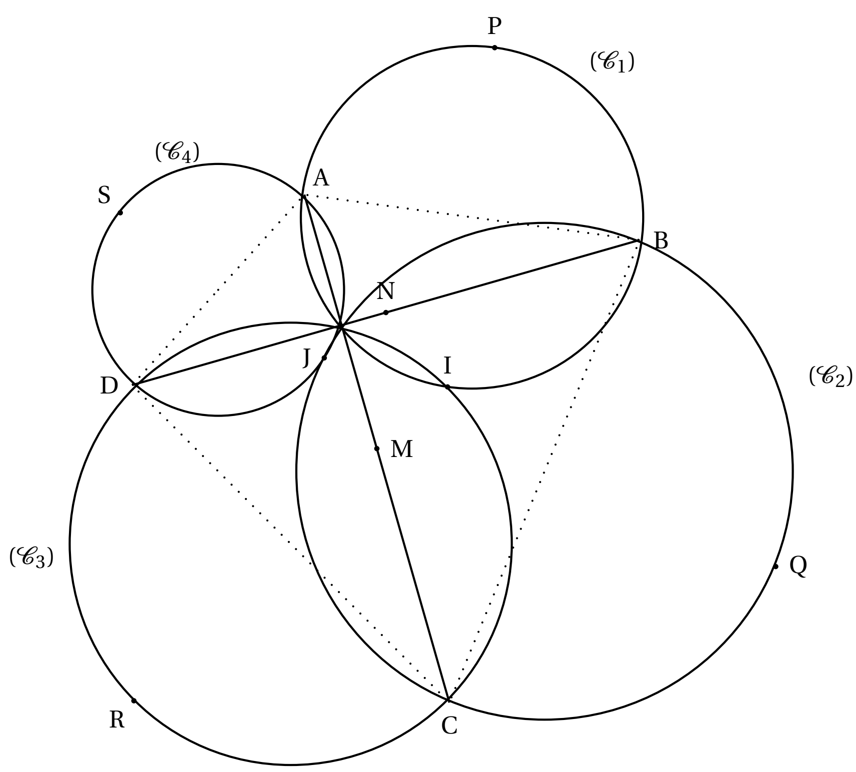
2. **a.** I est équidistant de D et de C; il en est de même de R diamétralement opposé; [DC] et [IR] sont donc deux diamètres perpendiculaires : le quadrilatère IDRC est donc un carré; si a est la mesure de l'un de ses côtés on sait que $\text{IR} = a\sqrt{2}$: donc l'image de D dans la similitude est le point R.

De même [IP] et [AB] sont deux diamètres perpendiculaires de $(\mathscr{C}_1)$, donc IBPA est un carré et on a donc :

$\dfrac{\text{IP}}{\text{IB}} = \sqrt{2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{IB}}\,,\,\overrightarrow{\text{IP}}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$: l'image de B par s est donc P.

Enfin on sait que INJM est un carré, donc $\dfrac{\text{IJ}}{\text{IN}} = \sqrt{2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{IN}}\,,\,\overrightarrow{\text{IJ}}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$: l'image de N par s est donc J.

b. N est le milieu de [BD] ; son image par la similitude s, le point J est le le milieu du segment image [PR].



PROBLÈME

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0\\ f(1) & = & 0\\ f(x) & = & (\ln x)\times\ln(1-x), \quad \text{pour} \quad x\in]0\,;\,1[\end{array}\right.$$

Partie A - Étude de la fonction *f*

1. **a.** $\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)-\ln(1)}{x-0}$.

   Par définition $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)-\ln(1)}{x-0}$ est égale au nombre dérivé en 0 de la fonction $x \longmapsto \ln(1-x)$ qui est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{1-x}$.

   Cette limite est donc égale à $-\dfrac{1}{1} = -1$.

   b. $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(\ln x)\times\ln(1-x)}{x} = \ln x \times \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

   Or $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et on vient de voir que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$, donc par produit de limites :

   $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: la fonction f n'est pas dérivable en 0.

   La courbe $\mathcal{C}$ admet en 0 une tangente verticale.

2. On a $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < -x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2} < -x+\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$, soit $0 < -x+\dfrac{1}{2} < 1$.

   De même $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} < x+\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$ soit $0 < x+\dfrac{1}{2} < 1$.

   - $f\left(\dfrac{1}{2}-x\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}-x\right)\times\ln\left(1-\dfrac{1}{2}+x\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}-x\right)\times\ln\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$.
   - $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\times\ln\left(1-\dfrac{1}{2}-x\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\times\ln\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$.

   Donc pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, $\quad f\left(\dfrac{1}{2}-x\right) = f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$.

   Donc si $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, les deux points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses $\dfrac{1}{2}-x$ et $\dfrac{1}{2}+x$ ont pour abscisse de leur milieu $\dfrac{1}{2}$ et la même ordonnée : ces points sont donc symétriques autour de l'axe vertical dont une équation est $x = \dfrac{1}{2}$.

   D'après le début de la question la courbe $\mathcal{C}$ a donc pour axe de symétrie la droite dont une équation est $x = \dfrac{1}{2}$.

3.
$$\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x.$$

   a. φ est dérivable comme différence de fonctions dérivables sur $]0\,;1[$ et sur cet intervalle :

   $\varphi'(x) = -\ln(1-x) - \dfrac{1}{1-x}\times(1-x) - \ln x - x\times\dfrac{1}{x} = -\ln(1-x)-1-\ln x-1 = -\ln(1-x)-\ln x-2$.

   De même φ' est dérivable sur $]0\,;1[$ et sur cet intervalle :

   $\varphi''(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1+x}{x(1-x)} = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$.

   Or sur $]0\,;1[$, $x > 0$ et $1-x > 0$, donc $x(1-x) > 0$. Le signe de $\varphi''(x)$ est donc celui de $2x-1$ qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$. Conclusion :

   - sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, φ' est décroissante;
   - sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$, φ' est croissante;

   b. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = +\infty$ et $\varphi'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln\dfrac{1}{2} - \ln\dfrac{1}{2} - 2 = \ln 2 + \ln 2 - 2 = 2\ln 2 - 2 < 0$.

   La fonction φ' étant continue car dérivable s'annule donc en un point unique $\alpha_1 \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

De même $\lim\limits_{x \to 1} \varphi'(x) = +\infty$ et $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, donc φ' s'annule aussi une seule fois sen $\alpha_2 \in \left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

On connaît les variations de φ', on a donc :

- sur $]0\ ;\ \alpha_1[$, $\varphi'(x) > 0$;
- sur $]\alpha_1\ ;\ \alpha_2[$, $\varphi'(x) < 0$;
- sur $]\alpha_2\ ;\ 1[$, $\varphi'(x) > 0$.

c. • On a $\lim\limits_{x \to 0} (1-x)\ln(1-x) = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$.

• En posant $X = 1 - x$, $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{X \to 0} X\ln X = 0$ et on a $\lim\limits_{x \to 1} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = 0$.

• $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = 0$. D'où le tableau de variations de φ sur $[0\,;\,1]$:

x	0		α_1		$\frac{1}{2}$		α_2		1
$\varphi'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
φ	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc :

- $\varphi(x) > 0$ sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$;
- $\varphi(x) < 0$ sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$;
- $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

4. a. f est dérivable car produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,1[$ et sur cet intervalle :

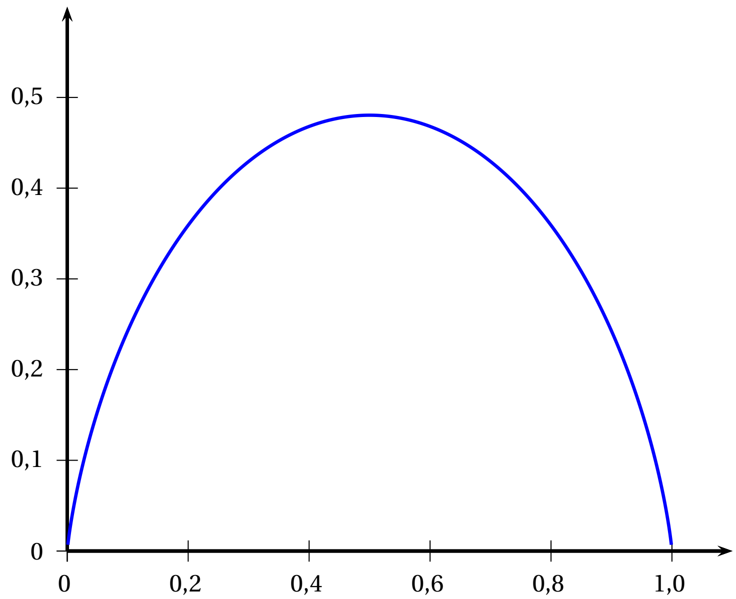
$f'(x) = \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln x = \frac{(1-x)\ln(1-x) - x\ln x}{x(1-x)}$ qui a le signe du numérateur c'est-à-dire du signe de $\varphi(x)$ car $x(1-x) > 0$.

b. Comme on a le signe de $f'(x)$, on en déduit les variations de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$(\ln 2)^2$	$\searrow$	0

Le tableau de variations montre que f est minorée par 0 et majorée par $(\ln 2)^2$

d.



Partie B - Encadrement d'une intégrale

1. **a.** • Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, d'où :

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $]0\,;\,1[$: on peut donc intégrer par parties :

$I_1(t) = \left[\dfrac{x^2 \ln x}{2}\right]_t^{\frac{1}{2}} - \displaystyle\int_t^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{2} \mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2 \ln x}{2}\right]_t^{\frac{1}{2}} - \displaystyle\int_t^{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{2} \mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{x^2}{2}\right]_t^{\frac{1}{2}} =$
$\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \ln \frac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{16} - \left(\dfrac{t^2 \ln t}{2} - \dfrac{t^2}{2}\right) = -\dfrac{\ln 2}{8} - \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{2} t^2 \ln t + \dfrac{t^2}{4}$.

• Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$, d'où :

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$; on peut encore intégrer par parties :

$I_2(t) = \left[\dfrac{x^3}{3} \ln x\right]_t^{\frac{1}{2}} - \displaystyle\int_t^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2}{3} \mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3} \ln x - \dfrac{x^3}{9}\right]_t^{\frac{1}{2}} =$
$\dfrac{1}{24} \ln \dfrac{1}{2} - \dfrac{t^3}{3} \ln t - \dfrac{1}{72} + \dfrac{t^3}{9} = -\dfrac{1}{24} \ln 2 - \dfrac{1}{72} - \dfrac{t^3 \ln t}{3} + \dfrac{t^3}{9}$.

b. On sait que $\displaystyle\lim_{t \to 0} t = \lim_{t \to 0} t^2 \ln t = 0$, donc :

$\displaystyle\lim_{t \to 0} I_1(t) = -\dfrac{\ln 2}{8} - \dfrac{1}{16}$ et $\displaystyle\lim_{t \to 0} I_2(t) = -\dfrac{\ln 2}{24} - \dfrac{1}{72}$.

2.

$$g(x) = -\left[x + \dfrac{x^2}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad h(x) = g(x) - \dfrac{x^2}{2}.$$

a. Soit $k(x) = \ln(1 - x) - g(x) = \ln(1 - x) + x + \dfrac{x^2}{2}$. Cette fonction est dérivable sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ et sur cet intervalle :

$k'(x) = -\dfrac{1}{1 - x} + 1 + x = \dfrac{-1 + 1 - x + x - x^2}{1 - x} = \dfrac{-x^2}{1 - x} < 0$.

La fonction k est donc décroissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$

b. On a de façon évidente $\lim\limits_{x\to 0} k(x) = 0$ et comme la fonction est décroissante sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$, $k(x) \leqslant 0 \iff \ln(1-x) \leqslant g(x)$.

c. Soit $l(x) = \ln(1-x) - h(x) = \ln(1-x) + x + x$ définie sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$.
Cette fonction est dérivable et sur son intervalle de définition :
$l'(x) = \dfrac{-1}{1-x} + 1 + 2x = \dfrac{-1+1+2x-x-2x^2}{1-x} = \dfrac{x-2x^2}{1-x} = \dfrac{x(1-2x)}{1-x}$.
Or si $x \in \left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$, $x > 0$, $1-2x > 0$ et $1-x >$, donc $l'(x) > 0$.

Conclusion : la fonction l est croissante sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} l(x) = 0$, on en déduit que $l(x) > 0$, soit $\ln(1-x) > h(x)$ sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

d. Des deux précédentes questions on déduit que :
$h(x) \leqslant \ln(1-x) \leqslant g(x) \iff -x-x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x - \dfrac{x^2}{2}$.
Sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$, $\ln x < 0$, d'où en multipliant par ce nombre chaque terme de l'encadrement précédent :
$\left(-x-\dfrac{x^2}{2}\right)\ln x \leqslant \ln x \times \ln(1-x) \leqslant \left(-x-x^2\right)\ln x$. Donc sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$:

$$\left(-x-\frac{x^2}{2}\right)\ln x \leqslant f(x) \leqslant \left(-x-x^2\right)\ln x.$$

3. **a.** Soit $t \in \left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$. En intégrant chaque fonction de l'encadrement de la question précédente sur l'intervalle $\left[t\,;\,\frac{1}{2}\right]$, on a :
$\displaystyle\int_t^{\frac{1}{2}} \left(-x-\frac{x^2}{2}\right)\ln x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_t^{\frac{1}{2}} \left(-x-x^2\right)\ln x\,\mathrm{d}x$, soit
$\displaystyle -\int_t^{\frac{1}{2}} x\ln x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_t^{\frac{1}{2}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant -\int_t^{\frac{1}{2}} x\ln x\,\mathrm{d}x - \int_t^{\frac{1}{2}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$
ou encore

$$-I_1(t) - \frac{1}{2}I_2(t) \leqslant I(t) \leqslant -I_1(t) - I_2(t).$$

b. L'encadrement précédent donne à la limite :
$\lim\limits_{t\to 0}\left[-I_1(t) - \dfrac{1}{2}I_2(t)\right] \leqslant \ell \leqslant \lim\limits_{t\to 0}\left[-I_1(t) - I_2(t)\right]$, soit d'après les calculs précédents :
$\dfrac{\ln 2}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{\ln 2}{48} + \dfrac{1}{144} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{\ln 2}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{\ln 2}{24} + \dfrac{1}{72}$ soit au millième près :

$$0,170 \leqslant \ell \leqslant 0,192.$$