

Baccalauréat S Centres étrangers 12 juin 2013

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La durée de vie moyenne d'une vanne est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire T .

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0002} = 5000 \text{ (h)}.$$

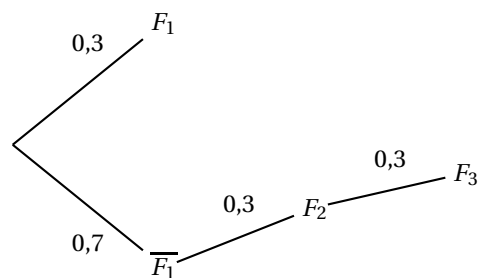
2. On calcule $p(T > 6000) = e^{-6000\lambda} = e^{6000 \times 0,0002} = e^{-1,2} \approx 0,301$.

Partie B

1.

2. On a $P(E) = P(F_1) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) =$
 $P(E) = 0,3 + 0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,3 + 0,063 = 0,363$.

3. Il faut calculer $P_E(F_1) = \frac{P(E \cap F_1)}{P(E)} = \frac{0,3}{0,363} \approx$
 $0,8264 \approx 0,826$ (au millième).



Partie C

1. Les conditions :

- $n = 400 \geq 30$;
- $np = 8 > 5$;
- $n(1-p) = 392 > 5$

sont bien réalisées. Dans ces conditions on sait que l'intervalle de fluctuation à 95 % est égal à :

$$I_{400} = \left[0,02 - 1,96 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{400}} ; 0,02 + 1,96 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{400}} \right] = [0,00628 ; 0,03372]$$

2. La fréquence observée est égale à $\frac{10}{400} = 0,025$ et $0,0025 \in I_{400}$.

L'affirmation de l'industriel ne peut être remise en cause.

Partie D

1. La calculatrice permet de trouver :

$$P(760 \leq D \leq 840) \approx 0,683.$$

2. $P(D \leq 880) = \frac{1}{2} + P(800 \leq D \leq 880) \approx 0,5 + 0,477 \approx 0,977$.

3. On a $P(D > 880) = 1 - P(D \leq 880) \approx 0,023$ soit à peu près 2,3 %, soit beaucoup plus que 1 %. L'industriel a tord.

Exercice 2**4 points***Commun à tous les candidats***Affirmation 1**

Un vecteur normal au plan P a pour coordonnées $(2 ; 1 ; -2)$.

Un vecteur normal au plan dont une équation est $2x + y + 2z - 24 = 0$ a pour coordonnées $(2 ; 1 ; 2)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles.

Affirmation fausse.

Affirmation 2

Pour $t = -1$ on trouve les coordonnées de A et pour $t = 3$ celles de C.

Affirmation vraie.

Affirmation 3

La droite (DE) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DE}(5 ; -4 ; 3)$ et on a vu que $\vec{u}(2 ; 1 ; -2)$ est un vecteur normal au plan P .

Or $\vec{u} \cdot \overrightarrow{DE} = 10 - 4 - 6 = 0$, donc la droite (DE) est parallèle au plan P . Comme les coordonnées de E ne vérifient pas l'équation de P ($4 + 7 + 12 - 5 = 0$ est une égalité fausse, la droite (DE) est strictement parallèle au plan (P).

Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -12 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$.

D'où $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = -60 + 60 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux ;

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = -60 + 60 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont manifestement pas colinéaires, donc le vecteur \overrightarrow{DE} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc orthogonal à ce plan.

Affirmation vraie.

Exercice 3**5 points***Commun à tous les candidats***Partie A**

1. a. Soit G la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $G(x) = x - e^{-x}$ est dérivable sur cet intervalle et $G'(x) = 1 - (-e^{-x}) = 1 + e^{-x}$: c'est donc une primitive de g .

$$\text{Donc } \mathcal{A}_1 = \int_0^a g(x) dx = [G(x)]_0^a = [x - e^{-x}]_0^a = a - e^{-a} - (0 - e^{-0}) = a + 1 - e^{-a}.$$

$$\text{b. } \mathcal{A}_2 = \int_a^1 g(x) dx = [G(x)]_a^1 = [x - e^{-x}]_a^1 = 1 - e^{-1} - (a - e^{-a}) = 1 - a + e^{-a} - e^{-1}.$$

2. a. Somme de fonctions dérivables sur $[0 ; 1]$, f est dérivable sur cet intervalle et :

$$f'(x) = 2 + 2e^{-x}$$

Les deux termes de cette somme sont positifs, donc sur $[0 ; 1]$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$ de $f(0) = -2 + \frac{1}{e} \approx -1,63$ à $f(1) = 2 - 2e^{-1} + \frac{1}{e} = 2 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e} = 2 - \frac{1}{e} \approx 1,63$. D'où le tableau de variation :

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{1}{e} - 2$	$2 - \frac{1}{e}$

b. Sur $[0; 1]$, f croît de $f(0) \approx -1,6$ à $f(1) \approx 1,6$. Comme elle est croissante et continue elle s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0; 1]$ pour un réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice permet de trouver que :

$0,4 < \alpha < 0,5$, puis $0,45 < \alpha < 0,46$ et enfin $0,452 < \alpha < 0,453$.

Donc $\alpha \approx 0,45$ au centième près.

3. On a :

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff a + 1 - e^{-a} = 1 - a + e^{-a} - e^{-1} \iff 2a - e^{-a} + e^{-1} = 0$, ce qui signifie que a est une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 1]$.

On a vu que cette solution est égale à α .

Finalement les aires sont égales pour $a = \alpha \approx 0,45$.

Partie B

1. On a $g(0) = 1 + 1 = 2$. Il est donc évident que l'aire du domaine \mathcal{D} est inférieure à $2 \times 1 = 2$.

Comme $g(1) = 1 + e^{-1}$, si $b \geq 1 + e^{-1}$ chacune des deux aires serait supérieure à 1 ce qui est impossible.

Donc $b < 1 + \frac{1}{e}$

2. L'aire du domaine du bas est égale à $b \times 1 = b$ qui est égale à la demi-aire de \mathcal{D} .

On a donc :

$$b = \frac{1}{2} \int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} [G(x)]_0^1 = \frac{1}{2} [x - e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2} [1 - e^{-1} + e^0].$$

Finalement $b = \frac{1}{2}(2 - e^{-1}) = 1 - \frac{e^{-1}}{2} \approx 0,816$.

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Partie A - Algorithmique et conjectures

1. Affecter à u la valeur $\frac{n \times u_n + 1}{2(n+1)}$

Affecter à n la valeur $n + 1$.

2. Il faut rajouter avant le Fin Tant que : « Afficher la variable u ».

3. La suite (u_n) semble être décroissante vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1. Pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} = nu_{n+1} - 1 = (n+1) \times \frac{n \times u_n + 1}{2(n+1)} - 1 = \frac{n \times u_n + 1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{n \times u_n - 1}{2} =$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n.$$

Cette relation montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme

$$v_1 = 1 \times u_1 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

2. On a donc pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} = 0,5 \times 0,5^{n-1} = 0,5^n$.

$$\text{Or } v_n = nu_n - 1 \iff u_n = \frac{v_n + 1}{n} = \frac{1 + 0,5^n}{n}.$$

3. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$, et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + (0,5)^{n+1}}{n+1} - \frac{1 + (0,5)^n}{n} = \frac{n + n \times 0,5^{n+1} - (n+1) - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \\ &= \frac{-1 + 0,5n \times 0,5^n - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \frac{-1 + 0,5^n(0,5n - n - 1)}{n(n+1)} = \frac{-1 + 0,5^n(-0,5n - 1)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante (vers zéro).

Partie C - Retour à l'algorithmique

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geq 0,001$ Affecter à u la valeur $\frac{n \times u + 1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable n

Exercice 4

5 points

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Partie A - Algorithmique et conjectures

1. Tant que $i < n$ faire

Affecter à i la valeur $i + 1$

Afficher i

Affecter à c la valeur $(0,8a + 0,3b)$

Afficher c

Affecter à b la valeur $(0,2a + 0,7b)$

Afficher b

Affecter à a la valeur c

Fin du Tant que

2. Au vu de ces résultats, la suite (a_n) semble décroître vers 18 et la suite (b_n) semble croître vers 12.

Partie B - Étude mathématique

1. a_n et b_n étant les nombres respectifs d'oiseaux présents sur les îles A et B au début de l'année $203 + n$, on a l'année suivante :

sur l'île A, 80 % des oiseaux de l'île A de l'année précédente et 30 % des oiseaux de l'île B de l'année précédente, soit :

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n,$$

sur l'île B, 20 % des oiseaux de l'île A de l'année précédente et 70 % des oiseaux de l'île B de l'année précédente, soit :

$$b_{n+1} = 0,2a_n + 0,7b_n.$$

Donc avec $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$, on a bien $U_{n+1} = MU_n$.

2. Initialisation :

$$M^1 = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^1 & 0,6 - 0,6 \times 0,5^1 \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^1 & 0,4 + 0,6 \times 0,5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = M. \text{ La propriété est vraie au rang 1.}$$

Hérédité : on suppose que pour $p \in \mathbb{N}$, on a $M^p = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^p & 0,6 - 0,6 \times 0,5^p \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^p & 0,4 + 0,6 \times 0,5^p \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors } M^{p+1} = M \times M^p = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^p & 0,6 - 0,6 \times 0,5^p \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^p & 0,4 + 0,6 \times 0,5^p \end{pmatrix}.$$

Le premier coefficient de cette matrice est :

$$0,8 \times (0,6 + 0,4 \times 0,5^p) + 0,3 \times (0,4 - 0,4 \times 0,5^p) = 0,48 + 0,32 \times 0,5^p + 0,12 - 0,2 \times 0,5^p = 0,6 + 0,2 \times 0,5^p = 0,6 + (0,4 \times 0,5) \times 0,5^p = 0,6 + 0,4 \times 0,5^{p+1}.$$

On démontrerait de la même façon que :

$$M^{p+1} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^{p+1} & 0,6 - 0,6 \times 0,5^{p+1} \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^{p+1} & 0,4 + 0,6 \times 0,5^{p+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.

La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire à partir du rang 1 : d'après le principe de récurrence elle est donc vraie quel que soit le naturel $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

3. Exprimer a_n en fonction de n , pour tout entier naturel $n \geq 1$.

4. On admet donc que pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $U_n = M^n U_0$ soit :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = 10$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20(0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 10(0,6 - 0,6 \times 0,5^n) \\ 20(0,4 - 0,4 \times 0,5^n) + 10(0,4 + 0,6 \times 0,5^n) \end{pmatrix}.$$

Finalement quel que soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$a_n = 20(0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 10(0,6 - 0,6 \times 0,5^n) = 12 + 8 \times 0,5^n + 6 - 6 \times 0,5^n = 18 + 2 \times 0,5^n.$$

Comme $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$. Il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times 0,5^n = 0$ et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 18.$$

Au bout de quelques années la population sur l'île A va se rapprocher de 18 millions (au bout de 10 ans : $\approx 18,002$)