

∞ **Baccalauréat Amérique du Nord mai 2021** ∞
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

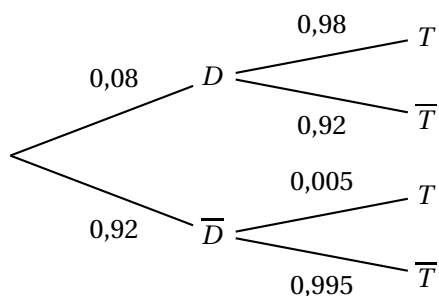
EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\bar{D} \cap T) : \text{or}$$

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784 \text{ et}$$

$$P(\bar{D} \cap T) = P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,00460. \text{ Donc :}$$

$$P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083.$$

3. a. La probabilité conditionnelle $P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx 0,9445$, soit 0,945 au millième près.

b. D'après la question précédente $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. a. Quel que soit l'athlète choisi la probabilité que cet athlète présente un test positif est 0,103. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

b. On sait que $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$: ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

c. La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :

$$0,103^0 \times (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807 \text{ soit environ } 0,581 \text{ au millième près.}$$

Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :

$$1 - 0,581, \text{ soit } 0,419 \text{ au millième près.}$$

2. On a pour n athlètes contrôlés, $P(X = 0) = 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$.

Il faut donc trouver n tel que :

$$1 - 0,897^n \geq 0,75 \iff 1 - 0,75 \geq 0,897^n \iff 0,25 \geq 0,897^n.$$

La calculatrice donne le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inéquation : pour $n = 13$, on a $0,897^{13} \approx 0,243$.

Il faut donc contrôler 13 athlètes en moyenne pour en trouver un positif.

EXERCICE 2

5 points

$$\begin{cases} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1 - 0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. • 2021 correspond à $n = 1$, donc $u_1 = 0,75u_0 \times (1 - 0,15u_0) = 0,75 \times 0,6 \times (1 - 0,15 \times 0,6) = 0,45 \times (1 - 0,09) = 0,45 \times 0,91 = 0,4095$ soit environ 410 individus.
- 2022 correspond à $n = 2$, donc $u_2 = 0,75u_1 \times (1 - 0,15u_1) = 0,75 \times 0,4095 \times (1 - 0,15 \times 0,4095) = 0,307125 \times (1 - 0,061425) = 0,307125 \times 0,938575 \approx 0,2822$ soit environ 228 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1 - 0,15x).$$

2. f est une fonction polynôme dérivable sur \mathbb{R} , donc sur $[0; 1]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 0,75(1 - 0,15x) - 0,75x \times 0,15 = 0,75 - 0,1125x - 0,1125x = 0,75 - 0,225x.$$

$$\text{Or } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0,225x \leq 0,225 \Rightarrow -0,225 \leq -0,225x \leq 0 \Rightarrow$$

$$0,75 - 0,225 \leq 0,75 - 0,225x \leq 0,75 \text{ ou enfin } 0,525 \leq f'(x) \leq 0,75.$$

Sur $[0; 1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0,6375$.

3. Sur $[0; 1]$, $f(x) = x \iff 0,75x(1 - 0,15x) = x \iff 0,75x(1 - 0,15x) - x = 0 \iff$
 $x[0,75(1 - 0,15x) - 1] = 0 \iff x(0,75 - 0,1125x - 1) = 0 \iff x(-0,25 - 0,1125x) = 0 \iff$
 $\begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ -0,25 - 0,1125x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ -0,25 = 0,1125x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ -\frac{0,25}{0,1125} = x \end{cases}$
 Or $-\frac{0,25}{0,1125} < 0$ donc dans $[0; 1]$, $S = \{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a. *Initialisation* : on a vu que $0 \leq 0,4095 \leq 0,6 \leq 1$, soit $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$: la relation est vraie au rang 0;

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0; 1]$, on a donc : $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$,

soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75 \times (1 - 0,15) = 0,6375 \leq 1$:

$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$: la relation est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

- b. La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0; elle est donc convergente.

- c. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) converge vers un nombre $\ell \geq 0$ et ce nombre ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont on a vu à la question 3. qu'elle n'avait que 0 comme solution.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = 0$.

5. a. L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroît, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

- b. L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02

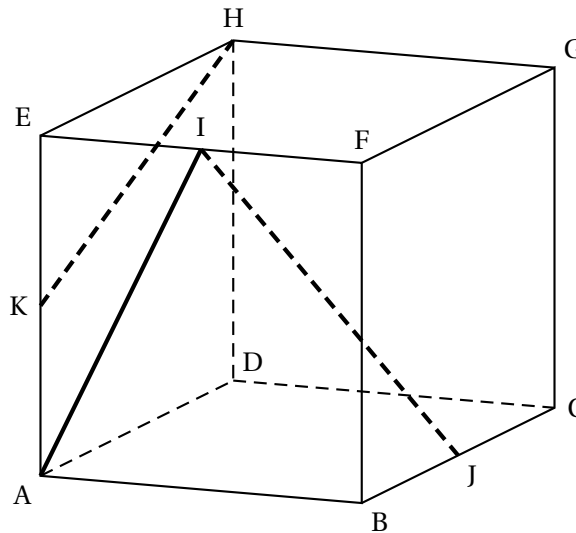
Il s'arrête à $n = 11$ car $u_{10} \approx 0,019$

L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats



En prenant le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

$$A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0; 1; 0), E(0; 0; 1)$$

$$F(1; 0; 1), G(1; 1; 1), H(0; 1; 1), I(0,5; 0; 1), J(1; 0,5; 0), K(0; 0; 0,5)$$

1. On a $\overrightarrow{AI}(0,5; 0; 1)$ et $\overrightarrow{KH}(0; 1; 0,5)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
2. a. Voir plus haut.
b. On a $\overrightarrow{IJ}(0,5; 0,5; -1)$, $\overrightarrow{AE}(0; 0; 1)$ $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$.
On a $2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$.
le vecteur \overrightarrow{AC} est donc une combinaison des vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{AE} : ces trois vecteurs sont donc coplanaires.
3. d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}(1; -2; 3)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}(1; 1; 2)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles
4. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{p}(1; 3; -2)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}(1; 1; 2)$.
Or $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{u_2} = 1 + 3 - 4 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan \mathcal{P} .
5. **Méthode 1**
Soit Δ la perpendiculaire à \mathcal{P} contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur \overrightarrow{p} , donc une équation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 5 + 1t \\ y = 3 + 3t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Le projeté L, de M sur le plan \mathcal{P} a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

$$\begin{cases} x = 5 + 1t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - 2t \\ x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \Rightarrow 5 + t + 3(3 + 3t) - 2(1 - 2t) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5 + t + 9 + 9t - 2 + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow 14t + 14 = 0 \Leftrightarrow t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} :

$$\begin{cases} x = 5 - 1 \\ y = 3 + 3 \times (-1) \\ z = 1 - 2 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Donc le projeté orthogonal de M sur le plan \mathcal{P} est le point L(4; 0; 3).

Méthode 2

On a $\overrightarrow{ML}(-1; -3; 2)$, donc $\overrightarrow{ML} = -\vec{p}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

D'autre part L(4; 0; 3) $\in \mathcal{P} \Leftrightarrow 4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 6 - 6 = 0$ est vraie, donc L est le projeté orthogonal de M sur le plan \mathcal{P} .

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Exercice A

5 points

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b , $(e^{a+b})^2 = e^{2(a+b)} = e^{2a+2b} = e^{2a} \times e^{2b}$. Donc l'affirmation est fausse.

Affirmation 2 : Une équation de la tangente t au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2 + (3 - x)e^x$ est :

$$M(x; y) \in t \Leftrightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

$$\text{Or } f(0) = -2 + 3e^0 = -2 + 3 = 1 \text{ et}$$

$$f'(x) = -e^x + (3 - x)e^x = (2 - x)e^x, \text{ d'où } f'(0) = 2e^0 = 2.$$

Donc $M(x; y) \in t \Leftrightarrow y - 1 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 3 : On a quel que soit le réel x : $e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = e^x \left(e^x - 1 + \frac{3}{xe^x} \right)$.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{xe^x} = 0.$$

Par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 + \frac{3}{xe^x} = +\infty$ et par produit de limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(e^x - 1 + \frac{3}{xe^x} \right) = +\infty$. L'affirmation est fausse.

Affirmation 4 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 - x + e^{-x}$

f somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = -1 - e^{-x} = -(1 + e^{-x}) < 0$ car quel que soit le réel x , $e^{-x} > 0$, donc $1 + e^{-x} > 1$ puis $-(1 + e^{-x}) < -1 < 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

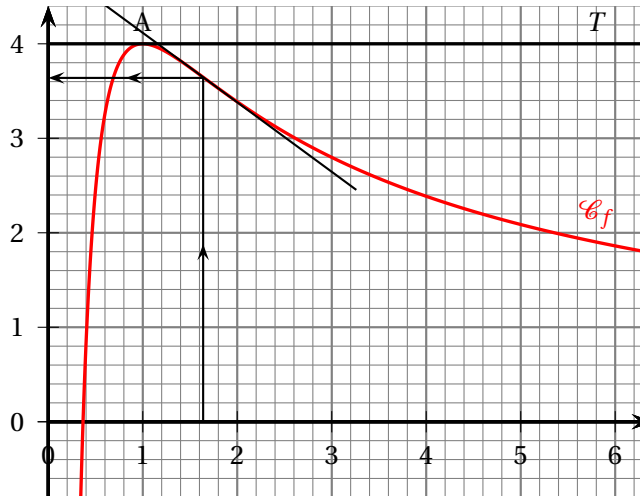
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Comme $f(0) = 1 + 1 = 2 > 0$ et $f(2) = 1 - 2 + e^{-2} \approx -0,86 < 0$, on a bien $0 < x_0 < 2$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 5 : On a $g'(x) = 2x - 5 + e^x$ et $g''(x) = 2 + e^x > 0$ comme somme de deux termes supérieurs à zéro. la fonction g est donc convexe sur \mathbb{R} . L'affirmation est vraie.

EXERCICE B

5 points



1. Par lecture graphique : $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b \ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}.$$

3. En utilisant les lectures du 1. :

$$f(1) = \frac{a + b \ln 1}{1} = 4 \iff a = 4;$$

$$f'(1) = \frac{b - 4 - b \ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4.$$

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4 \ln x}{x}.$$

4. • On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$;

• On a $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{4 \ln x}{x}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ et on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

5. On a donc sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-4 \ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4 \ln x$.

On sait que sur $]0; 1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0; 1[$;

Par contre sur $]1; +\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$;

$f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1; 4)$ est le maximum de la fonction sur $]0; +\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0; 1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $]1; +\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x = 1$.

6. f' étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \frac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4 \ln x)}{x^4} = \frac{-4x + 8x \ln x}{x^4} = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}.$$

7. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :

$$f''(x) = 0 \iff \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3} = 0 \iff -4 + 8 \ln x = 0 \iff -1 + 2 \ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} \approx 1,649 \text{ (ou } \sqrt{e}\text{)}.$$

L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\sqrt{e}} \approx 3,639$.

Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.

