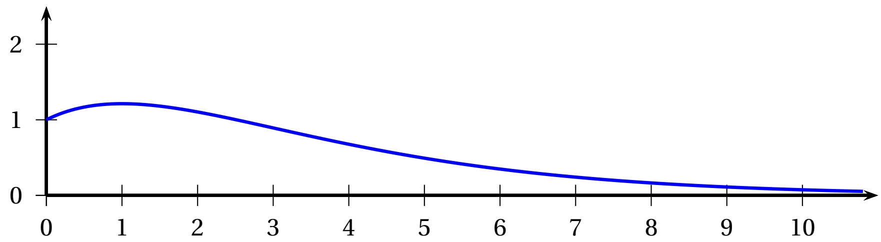
Corrigé du baccalauréat S (obligatoire)
Nouvelle Calédonie – février 2020

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)\,\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$,
où a et b désignent deux nombres réels. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous.



Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

1. $f(0) = 1$ et $f'(1) = 0$.
2. $f'(x) = a \times \text{e}^{-\frac{1}{2}x} + (ax+b) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)\text{e}^{-\frac{1}{2}x} = \left(a - \dfrac{1}{2}ax - \dfrac{1}{2}b\right)\text{e}^{-\frac{1}{2}x} = \left(-\dfrac{1}{2}ax - \dfrac{1}{2}b + a\right)\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$
3. $f(0) = 1 \iff (0+b)\,\text{e}^0 = 1 \iff b = 1$ donc $f(x) = (ax+1)\,\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$ et $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{2}ax - \dfrac{1}{2} + a\right)\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

   $f'(1) = 0 \iff \left(-\dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{2} + a\right)\text{e}^{-\frac{1}{2}} = 0 \iff \dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{2} = 0 \iff a = 1$

   Donc $a = b = 1$; on en déduit que $f(x) = (x+1)\,\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$ et que $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\right)\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\,\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

1. **a.** $f(x) = (x+1)\,\text{e}^{-\frac{1}{2}x} = x\,\text{e}^{-\frac{1}{2}x} + \text{e}^{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{x}{\text{e}^{\frac{1}{2}x}} + \text{e}^{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{2\frac{1}{2}x}{\text{e}^{\frac{1}{2}x}} + \text{e}^{-\frac{1}{2}x} = 2\left(\dfrac{\frac{1}{2}x}{\text{e}^{\frac{1}{2}x}}\right) + \text{e}^{-\frac{1}{2}x}$

   b.
   - On sait que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \dfrac{\text{e}^X}{X} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\text{e}^X} = 0$.

     On pose $X = \dfrac{1}{2}x$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$. On peut donc dire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2}x}{\text{e}^{\frac{1}{2}x}} = 0$.
   - On sait que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \text{e}^{-X} = 0$.

     On pose $X = \dfrac{1}{2}x$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$. On peut donc dire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-\frac{1}{2}x} = 0$.

   On peut donc déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

Or, pour tout x, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ qui s'annule et change de signe pour $x = 1$.

$f(0) = 1$; $f(1) = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On établit le tableau des variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

3. On complète le tableau de variations en plaçant le nombre 0,07 :

x	0		1		α		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$0{,}07$	$\searrow$	0

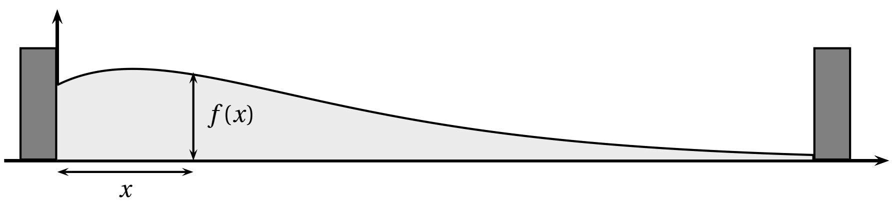
On en déduit que l'équation $f(x) = 0{,}07$ admet une solution unique dans $[0\,;\,+\infty[$.

4. En utilisant la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 10{,}14$ ce qui donne 10 comme arrondi à l'unité.

Partie C - Modélisation d'un tas de sable

Dans cette partie, on considère que la courbe de la fonction f modélise le profil d'un tas de sable. La longueur x et la hauteur $f(x)$ sont exprimées en mètres.

Ainsi, le fait que $f(0) = 1$ signifie qu'à son extrémité gauche, la hauteur du tas de sable est de 1 mètre. On souhaite que le tas de sable soit limité par deux murs comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Le mur de gauche coïncide avec l'axe des ordonnées et le mur de droite est placé de telle sorte que la hauteur de sable à cet endroit est de 7 cm.



1. Une hauteur de 7 cm correspond à 0,07 m; il faut donc savoir à quelle distance x du mur de gauche le mur de droite doit être placé pour que $f(x) = 0{,}07$. Cette distance est de α soit environ 10 mètres.

2. Soit G la fonction définie sur $[0\,;\,10]$ par $G(x) = (-2x-4)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

$G'(x) = (-2) \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + (-2x-4) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = (-2+x+2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction g définie sur $[0\,;\,10]$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

3. $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = g(x) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

La fonction G est une primitive de g. On cherche une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$; c'est la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}}$ soit la fonction $x \longmapsto -2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

La fonction f a donc pour primitive la fonction F définie par

$F(x) = G(x) - 2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = (-2x-4)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} - 2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = (-2x-6)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

4. Pour pouvoir créer un terrain de sport sur sable, on décide de niveler le tas de sable, c'est-à-dire de l'étaler à une même hauteur entre les deux murs.
La hauteur du tas de sable une fois le nivellement réalisé est égale à la valeur moyenne de la fonction f sur $[0\,;\,10]$, soit
$\dfrac{1}{10-0}\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{10}\left[F(x)\right]_0^{10} = \dfrac{1}{10}\left[-26\,\mathrm{e}^{-5} - (-6)\right] = \dfrac{6-26\,\mathrm{e}^{-5}}{10} \approx 0{,}58$
La hauteur du tas de sable une fois le nivellement réalisé est donc d'environ 58 cm.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les probabilités seront arrondies si nécessaire au millième.

Partie A

Une antenne relais chargée d'acheminer des communications est exploitée par trois opérateurs : l'opérateur A, l'opérateur B et l'opérateur C.
Par ailleurs, cette antenne utilise deux types de canal : le canal vocal (pour les communications téléphoniques) et le canal internet (pour les communications par texto ou par mail).
On dispose des données suivantes :

- 40 % des communications passent par l'opérateur A;
  25 % des communications passent par l'opérateur B;
- 10 % des communications passant par l'opérateur A utilisent le canal vocal;
- 20 % des communications passant par l'opérateur B utilisent le canal vocal;
- 20 % de l'ensemble des communications utilisent le canal vocal.

On choisit une communication au hasard et on considère les évènements :

- A : « la communication passe par l'opérateur A »;
  B : « la communication passe par l'opérateur B »;
- C : « la communication passe par l'opérateur C »;
- V : « la communication utilise le canal vocal ».

1. À l'aide des valeurs de l'énoncé, on complète les pointillés indiqués sur les branches de l'arbre pondéré donné en **ANNEXE**.
2. La probabilité que la communication passe par l'opérateur A et utilise le canal vocal est $P(A\cap V) = P(A)\times P_A(V) = 0{,}4\times 0{,}1 = 0{,}04$.
3. La communication passe par l'opérateur C.
La probabilité qu'elle soit acheminée par le canal vocal est $P_C(V) = \dfrac{P(C\cap V)}{P(C)}$.
On calcule $P(C\cap V)$ en utilisant la formule des probabilités totales :
$P(V) = P(A\cap V) + P(B\cap V) + P(C\cap V) \iff P(V) = P(A\cap V) + P(B)\times P_B(V) + P(C\cap V) \iff$
$0{,}2 = 0{,}04 + 0{,}25\times 0{,}2 + P(C\cap V) \iff P(C\cap V) = 0{,}11$
Donc $P_C(V) = \dfrac{P(C\cap V)}{P(C)} = \dfrac{0{,}11}{0{,}35} \approx 0{,}314$.

Partie B

Cette antenne relais couvre une zone géographique bien définie appelée cellule. Dans cette cellule, les ressources radio sont limitées à 350 appels simultanés. Cela signifie qu'au-delà de 350 appels, l'antenne relais est saturée.
Dans cette cellule, 1 600 personnes possèdent chacune un téléphone mobile.
À un instant donné, on choisit au hasard une personne parmi les 1 600 personnes de la cellule. On admet que la probabilité que cette personne passe un appel téléphonique est égale à 0,2. On admet en outre que les 1 600 personnes de la cellule agissent indépendamment les unes des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes passant un appel à un instant donné dans cette cellule.

1.
   - Une expérience aléatoire admet deux issues : la personne passe un appel téléphonique avec une probabilité de $p = 0{,}2$, ou non.
   - On réalise cette expérience dans les mêmes conditions 1 600 fois.

   Donc la variable aléatoire X égale au nombre de personnes passant un appel à un instant donné dans cette cellule suit la loi binomiale de paramètres $n = 1600$ et $p = 0{,}2$.
2. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 1600 \times 0{,}2 = 320$.
   Il y a donc en moyenne 320 personnes qui téléphonent à un instant donné.
3. Au-delà de 350 appels, l'antenne relais est saturée; donc la probabilité que l'antenne ne soit pas saturée est $P(X \leqslant 350) \approx 0{,}971$.

Partie C

On considère une autre cellule dans laquelle le nombre de personnes passant un appel téléphonique au même moment est modélisé par une variable aléatoire Y suivant une loi normale d'espérance $\mu = 335$ et d'écart-type σ inconnu,

1. On a constaté que, dans cette cellule, la probabilité que l'antenne soit saturée est 0,001 5.
   On rappelle que l'antenne est saturée lorsque le nombre de personnes passant un appel téléphonique au même moment est supérieur à 350.
   a. Sur l'**ANNEXE**, on a réalisé un croquis donnant l'allure de la courbe de la fonction densité de la variable aléatoire Y.
   On hachure sur cette annexe le domaine correspondant à la probabilité que l'antenne soit saturée.
   b. La probabilité que l'antenne soit saturée est 0,001 5 ce qui veut dire que $P(Y > 350) = 0{,}0015$ ce qui équivaut à $P(Y \leqslant 350) = 1 - 0{,}0015 = 0{,}9985$.
   La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu = 335$ et d'écart-type $\sigma > 0$ donc la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y-335}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
   $Y \leqslant 350 \iff Y - 335 \leqslant 15 \iff \dfrac{Y-335}{\sigma} \leqslant \dfrac{15}{\sigma} \iff Z \leqslant \dfrac{15}{\sigma}$
   Chercher σ tel que $P(Y \leqslant 350) = 0{,}9985$ sachant que Y suit la loi normale de moyenne $\mu = 335$ et d'écart-type σ, équivaut à chercher σ tel que $P\left(Z \leqslant \dfrac{15}{\sigma}\right) = 0{,}9985$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite.
   La calculatrice donne $\dfrac{15}{\sigma} \approx 2{,}9678$ ce qui donne $\sigma \approx 5$.
2. L'antenne dispose d'un mode « économie d'énergie » qui s'active lorsque moins de 330 personnes passent un appel téléphonique au même moment.
   La probabilité que l'antenne soit en mode « économie d'énergie » est $P(Y < 330)$ qui vaut environ 0,159.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère l'équation (E) suivante : $z^3 + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)z^2 + 4\left(1 - \sqrt{2}\right)z - 8 = 0$, ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. $$\begin{aligned}(z-2)\left(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4\right) &= z^3 + 2\sqrt{2}z^2 + 4z - 2z^2 - 4\sqrt{2}z - 8\\ &= z^3 + \left(2\sqrt{2} - 2\right)z^2 + \left(4 - 4\sqrt{2}\right)z - 8\\ &= z^3 + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)z^2 + 4\left(1 - \sqrt{2}\right)z - 8\end{aligned}$$
2. On résout dans **C** l'équation (E).
   $(E) \iff (z-2)\left(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4\right) = 0 \iff z - 2 = 0$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

- L'équation $z-2=0$ a pour solution $z_1=2$.
- On résout l'équation (E') : $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$.
  $\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times 4=8-16=-8=-\left(2\sqrt{2}\right)^2$
  Donc l'équation (E') admet deux solutions complexes conjuguées
  $z_2=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{-2\sqrt{2}+\mathrm{i}\times 2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_3=\overline{z_2}=-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}$.

L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\left\{z_1=2\,;\ z_2=-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\,;\ z_3=-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

3. On écrit toutes les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

- $z_1=2=2\,\mathrm{e}^{0}$
- $z_2=-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$
  - $|z_2|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2$
  - $z_2=2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

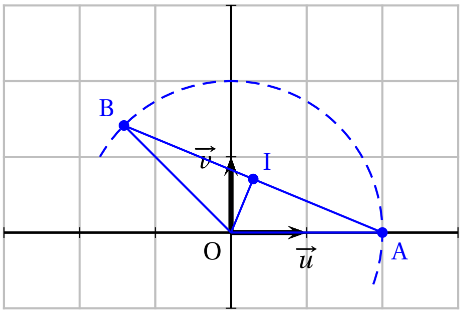
  Donc $z_2=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$
- $z_3=\overline{z_2}=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

PARTIE B

Dans cette partie, on cherche à déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On considère les points A et B du plan complexe d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=2$ et $z_{\mathrm{B}}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et I le milieu du segment [AB] d'affixe z_{I}.



1. $\mathrm{OA}=|z_{\mathrm{A}}|=2$ et $\mathrm{OB}=|z_{\mathrm{B}}|=\left|2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right|=2$

Donc OA = OB et donc le triangle OAB est isocèle de sommet principal O.

2.
- Le point I est le milieu de [AB] donc (OI) est une médiane du triangle OAB. Comme ce triangle est isocèle en O, cette médiane est aussi bissectrice.
  Donc, à 2π près, $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.
  Mais $z_{\mathrm{A}}=2$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\,\vec{u}$.
  On peut donc dire que $\left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.
- $z_{\mathrm{B}}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ donc $\dfrac{3\pi}{4}$ est un argument de z_{B}, donc à 2π près, $\left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.

On en déduit donc qu'une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}\right)$ est $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\pi}{4}$ soit $\dfrac{3\pi}{8}$.

3. D'après la partie A, on sait que $-\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}=2\,\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$ donc $z_{\text{B}}=-\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}$.

Le point I est le milieu de [AB], donc $z_{\text{I}}=\dfrac{z_{\text{A}}+z_{\text{B}}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$|z_{\text{I}}|=\sqrt{\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{4-4\sqrt{2}+2}{4}+\dfrac{2}{4}}=\sqrt{\dfrac{8-4\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

4. D'après les questions précédentes, le nombre z_{I} a pour argument $\dfrac{3\pi}{8}$ et pour module $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ donc $z_{\text{I}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+\text{i}\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

En utilisant les formes algébrique et trigonométrique de z_{I}, on a donc :

$\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+\text{i}\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit que $\cos\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et que $\sin\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=6$ et pour tout n, $u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n+1$.

Affirmation 1 : Pour tout entier naturel n, $u_n=2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4$.

En calculant les premiers termes de la suite, on peut conjecturer que cette affirmation est vraie.

Démontrons par récurrence que $u_n=2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4$.

- Pour $n=0$, $u_n=u_0=6$ et $2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4=2\left(\dfrac{3}{4}\right)^0+4=2+4=6$.

  Donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie pour un rang $n\geqslant 0$ quelconque ;

  c'est-à-dire $u_n=2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4$.

  On va démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.

  $$\begin{aligned}u_{n+1}&=\dfrac{3}{4}u_n+1=\dfrac{3}{4}\left(2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4\right)+1=\dfrac{3}{4}\times 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\dfrac{3}{4}\times 4+1=2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}+3+1\\&=2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}+4\end{aligned}$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- La propriété est vraie au rang $n=0$ et elle est héréditaire pour tout $n\geqslant 0$ donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\geqslant 0$.

Affirmation 1 vraie

2. Soit (t_n) une suite géométrique de premier terme $t_0=2$ et de raison $\dfrac{1}{4}$.

On appelle S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (t_n), soit $S_n=t_0+t_1+\ldots+t_n$.

Affirmation 2 : La suite (S_n) a pour limite $+\infty$.

D'après le cours sur les suites géométriques,

$S_n=t_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}=2\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}=2\times\dfrac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)=\dfrac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

Or $-1<\dfrac{1}{4}<1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}=0$. On déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{8}{3}$.

Affirmation 2 fausse

3. On définit la suite (c_n), pour tout entier naturel n non nul, par $c_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{n}$.

Affirmation 3 : La suite (c_n) est convergente.

On sait que pour tout n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ donc pour tout $n > 0$, $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant c_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$; on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$; on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.
- On a vu que, pour tout $n > 0$, $u_n \leqslant c_n \leqslant v_n$.

D'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite (c_n) converge vers 1.

Affirmation 3 vraie

4. Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points $\text{A}(1~;~~2~;0)$, $\text{B}(3~;0~;6)$, $\text{C}(6~;~-1~;~9)$ et $\text{D}(-4~;~4~;~-6)$.

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

On cherche les représentations paramétriques des droites (AB) et (CD).

- Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(2~;~-2~;~6)$.

  Donc la droite (AB) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 1+2t\\ y &=& 2-2t\\ z &=& 6t \end{array}\right.$, $t \in \mathbf{R}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$ a pour coordonnées $(-10~;~5~;~-15)$.

  Donc la droite (AB) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 6-10s\\ y &=& -1+5s\\ z &=& 9-15s \end{array}\right.$, $s \in \mathbf{R}$.

Les droites sont sécantes s'il existe un couple $(t~,~s)$ tel que : $\left\{\begin{array}{r c l} 1+2t &=& 6-10s\\ 2-2t &=& -1+5s\\ 6t &=& 9-15s \end{array}\right.$

La 3$^{\text{e}}$ équation équivaut à $2t = 3-5s$ et si on remplace $2t$ dans la 1$^{\text{re}}$ équation, on obtient $1+3-5s = 6-10s$ soit $5s = 2$ donc $s = \dfrac{2}{5}$.

De $2t = 3-5s$ et $s = \dfrac{2}{5}$, on déduit $2t = 3-2\times\dfrac{2}{5}$ soit $2t = 1$ donc $t = \dfrac{1}{2}$.

En prenant la 2$^{\text{e}}$ équation, on a : $2-2t = 2-2\times\dfrac{1}{2} = 1$, et $-1+5s = -1+5\times\dfrac{2}{5} = -1+2 = 1$.

Les deux droites sont donc sécantes.

En remplaçant t par $\frac{1}{2}$ ou s par $\frac{2}{5}$, on peut calculer les coordonnées du point d'intersection ; on trouve $(2~;~1~;~3)$.

Affirmation 4 vraie

5. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $\text{A}(1~;2~;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(6~;~4~;~-1)$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& t+1\\ y &=& -t-1\\ z &=& 2t+3 \end{array}\right.$, $t \in \mathbf{R}$.

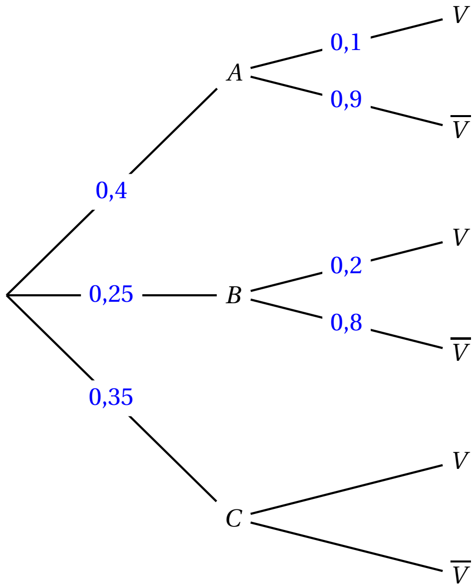
Affirmation 5 : Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ ne possèdent aucun point commun.

On détermine une équation du plan $\mathscr{P}$. Le point M $(x\,,\,y\,,\,z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\text{AM}}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\text{AM}} = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{\text{AM}}$ a pour coordonnées $(x-1\,;\,y-2\,;\,z)$.
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\text{AM}} = 0 \iff 6(x-1)+4(y-2)-z = 0 \iff 6x+4y-z-14 = 0$
Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $6x+4y-z-14 = 0$.
Pour savoir si le plan et la droite ont des points en commun, on résout le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+1\\ y &=& -t-1\\ z &=& 2t+3\\ 6x+4y-z-14 &=& 0\end{array}\right.$$
On cherche t tel que $6(t+1)+4(-t-1)-(2t+3)-14 = 0$, c'est-à-dire $6t+6-4t-4-2t-3-14 = 0$ ou encore $0t = 15$. Il n'y a donc pas de valeur de t vérifiant le système donc la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ ne possèdent aucun point commun.

Affirmation 5 vraie

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2 : PARTIE A



Exercice 2 : PARTIE C