

∞ ADMISSIBILITÉ À L'ÉCOLE DE SANTÉ DES ARMÉES ∞
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 (6 points)

QCM 1

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$.

Alors pour tout réel x :

A. $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2}$ B. $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 2)^2}$ C. $f'(x) = \frac{e^{2x} - 4}{(e^x + 2)^2}$ D. $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(e^x + 2)^2}$

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \text{ donc } f'(x) = \frac{e^x(e^x + 2) - (e^x - 2)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x(e^x + 2 - e^x + 2)}{(e^x + 2)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2} \end{array} \right. \quad \text{Réponse A}$$

QCM 2

La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 3 \ln x)$ est égale à

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 0 D. $\frac{4}{3}$

$$\left| \begin{array}{l} 4x - 3 \ln x = x \left(4 - 3 \frac{\ln x}{x} \right) \\ \text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - 3 \frac{\ln x}{x} \right) = 4 \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(4 - 3 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{Réponse A}$$

QCM 3

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$.

Une primitive de f sur \mathbf{R} est la fonction F définie pour tout réel x par :

A. $F(x) = \frac{1}{x^3 + 2}$ B. $F(x) = \frac{\ln(x^4 + 2)}{4}$ C. $F(x) = 4 \ln(x^4 + 2)$ D. $F(x) = \ln(x^4 + 2)$

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}; \text{ si on pose } u(x) = x^4 + 2, \text{ on a } : u'(x) = 4x^3. \\ \text{Donc } f(x) \text{ est de la forme } \frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ qui a pour primitive } \frac{\ln(u(x))}{4}. \end{array} \right. \quad \text{Réponse B}$$

QCM 4

Le nombre de solutions réelles de l'équation $e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^x}$ est :

A. 2 B. 1 C. 0 D. aucune des 3 propositions précédentes

$$\left| e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^x} \iff e^{\frac{1}{x}} = e^{-x} \iff \frac{1}{x} = -x \iff x^2 = -1. \text{ Pas de solution dans } \mathbf{R}. \right.$$

Réponse C**QCM 5**

Le nombre de solutions réelles de l'équation $\ln(x^2) = (\ln x)^2$ est :

- A. 2 B. 1 C. 0 D. aucune des 3 propositions précédentes

$$\left| \begin{aligned} \ln(x^2) = (\ln x)^2 &\iff 2(\ln x) - (\ln x)^2 = 0 \iff (\ln x)(2 - \ln x) = 0 \\ &\iff \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 2 \iff x = 1 \text{ ou } x = e^2 \end{aligned} \right.$$

Réponse A**QCM 6**

Une promotion de 50 étudiants doit élire deux délégués. Le nombre de possibilités est :

- A. 2 500 B. 2 450 C. 1 225 D. aucune des 3 propositions précédentes

$$\left| \binom{50}{2} = 1\,225 \right.$$

Réponse C**EXERCICE 2 (6 points)****QCM 7**

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Dans cette population, au cours d'une épidémie de cette maladie, on constate qu'il y a, parmi les malades, une personne vaccinée pour quatre non vaccinées et aussi un malade sur douze parmi les personnes vaccinées.

Dans cette population, la probabilité de tomber malade est :

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{5}{48}$ C. $\frac{17}{60}$ D. aucune des 3 propositions précédentes

On choisit au hasard une personne dans la population. On appelle V l'évènement « la personne est vaccinée », et M l'évènement « la personne est malade ».

D'après le texte :

- « Le quart d'une population a été vacciné » donc la probabilité de choisir au hasard une personne vaccinée dans la population est : $P(V) = \frac{1}{4}$.
- « il y a, parmi les malades, une personne vaccinée pour quatre non vaccinées » donc sur 5 personnes malades, il y en a une vaccinée, donc la probabilité de choisir au hasard une personne vaccinée parmi les malades est : $P_M(V) = \frac{1}{5}$.
- Il y a « un malade sur douze parmi les personnes vaccinées » donc la probabilité de choisir une personne malade parmi les vaccinées est : $P_V(M) = \frac{1}{12}$.

On a donc :

$$\bullet P(V \cap M) = P(V) \times P_V(M) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{48}$$

$$\bullet P_M(V) = \frac{1}{5} \iff \frac{P(V \cap M)}{P(M)} = \frac{1}{5} \iff P(M) = 5 \times P(V \cap M)$$

$$\text{On en déduit que } P(M) = 5 \times \frac{1}{48} = \frac{5}{48}$$

Réponse B

QCM 8

À l'épreuve de mathématiques du concours d'entrée à l'École de Santé des Armées, les candidats sont sélectionnés en répondant à 10 questions.

Pour chaque question, ils doivent choisir la bonne réponse parmi quatre affirmations dont une seule est exacte.

Un candidat se présente et répond à toutes les questions au hasard. La probabilité qu'il ait au moins 9 réponses exactes est égale à :

A. $\frac{9}{4}$

B. $1 - \frac{1}{2^{20}}$

C. $\frac{31}{4^{10}}$

D. $\frac{1}{4^5}$

La variable aléatoire X qui donne le nombre de bonnes réponses aux dix questions suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

$$\text{Donc pour tout entier } k \text{ entre } 0 \text{ et } 10, \text{ on a : } P(X = k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-k}.$$

On cherche $P(X \geq 9)$, c'est-à-dire $P(X = 9) + P(X = 10)$.

$$\begin{aligned} P(X = 9) + P(X = 10) &= \binom{10}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^9 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{10} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= 10 \times \frac{1}{4^9} \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4^{10}} \times 1 = \frac{30}{4^{10}} + \frac{1}{4^{10}} = \frac{31}{4^{10}} \end{aligned}$$

Réponse C

QCM 9

Si une fonction f définie sur \mathbf{R} vérifie : $x + 2 \leq f(x)$ pour tout réel x , alors on peut déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers

A. $-\infty$

B. -2

C. 0

D. $+\infty$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty$.

Si $x + 2 \leq f(x)$ pour tout réel x , on peut déduire d'après les théorèmes de comparaison que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Réponse D

QCM 10

On considère une suite réelle (u_n) strictement croissante de premier terme $u_0 = 1$.

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{-1}{1 + 3u_n}$.

Alors la suite (v_n) est :

A. croissante

B. décroissante

C. non monotone

D. arithmétique

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{1+3u_{n+1}} - \frac{-1}{1+3u_n} = \frac{-(1+3u_n) + (1+3u_{n+1})}{(1+3u_{n+1})(1+3u_n)} = \frac{-1-3u_n+1+3u_{n+1}}{(1+3u_{n+1})(1+3u_n)}$$

$$= \frac{3(u_{n+1} - u_n)}{(1+3u_{n+1})(1+3u_n)}$$

- On sait que la suite (u_n) est strictement croissante donc, pour tout n , on a : $u_{n+1} - u_n > 0$.
- $u_0 = 1 > 0$ et la suite (u_n) est croissante, donc tous les termes de la suite sont supérieurs à u_0 donc ils sont strictement positifs. On peut donc dire que pour tout n , on a : $1+3u_n > 0$ et $1+3u_{n+1} > 0$.

On peut donc déduire que pour tout n , $v_{n+1} - v_n > 0$ et donc que la suite (v_n) est croissante.

Réponse A**QCM 11**

On considère deux évènements A et B , d'évènements contraires \bar{A} et \bar{B} tels que $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = 0,2$ et $P(A) = P(\bar{B}) = 0,6$.

Alors la probabilité $P(\bar{A} \cap B)$ est égale à :

A. 0,12

B. 0,28

C. 0,48

D. 0,36

D'après la formule des probabilités totales : $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$

- $P(A) = 0,6$ donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(\bar{A}) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$

Donc $P(\bar{A} \cap B) + 0,12 = 0,4$ et donc $P(\bar{A} \cap B) = 0,4 - 0,12 = 0,28$

Réponse B**QCM 12**

L'intégrale $\int_0^1 \frac{2e^x}{(e^x+4)^2} dx$ est égale à

A. $2(e+4)^2$ B. $2(e+4)$ C. $\frac{2}{5} - \frac{2}{e+4}$ D. $\frac{1}{e+4} - 1$

La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+4)^2}$ est de la forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ avec $u(x) = e^x + 4$, donc elle a pour primitive la fonction $x \mapsto -\frac{1}{u(x)}$ soit $x \mapsto -\frac{1}{e^x+4}$.

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{(e^x+4)^2} dx = \left[-\frac{2}{e^x+4} \right]_0^1 = -\frac{2}{e^1+4} + \frac{2}{e^0+4} = -\frac{2}{e+4} + \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5} - \frac{2}{e+4}$$

Réponse C

EXERCICE 3 (8 points)**Partie A : Équation différentielle**

On donne : $e = 2,71\dots$; $e^2 = 7,38\dots$; $e^3 = 20,08\dots$

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Soit u la fonction définie pour tout x réel par $u(x) = x e^{-x}$.

$$\text{Donc } u'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) e^{-x} = (1 - x) e^{-x}.$$

$u'(x) + u(x) = (1 - x) e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$ donc la fonction u est solution de l'équation différentielle (E).

2. On résout l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

On sait que l'équation différentielle $ay' + by = 0$ a pour solutions les fonctions définies par $y(x) = k e^{-\frac{b}{a}x}$ où k est un réel quelconque, donc l'équation différentielle (E_0) a pour solutions les fonctions définies par $y(x) = k e^{-x}$ où k est un réel quelconque.

3. Toute solution de l'équation (E) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) et d'une solution particulière de (E).

Donc les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions h définies par $h(x) = k e^{-x} + x e^{-x}$ où k est un réel quelconque.

4. On cherche la fonction g solution de (E) qui vérifie $g(0) = 2$.

$$g(0) = 2 \iff k e^0 + 0 e^0 = 2 \iff k = 2$$

La fonction g solution de (E) qui vérifie $g(0) = 2$ est définie par $g(x) = 2 e^{-x} + x e^{-x}$.

Partie B : Étude mathématique d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = (x + 2) e^{-x}$.

1. a. On va dresser le tableau de variation complet de la fonction f en précisant les extremums éventuels.

- $f(x) = (x + 2) e^{-x}$ donc

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x + 2) \times (-1) e^{-x} = (1 - x - 2) e^{-x} = (-x - 1) e^{-x}$$

$f'(x)$ s'annule et change de signe quand $(-x - 1)$ s'annule, soit pour $x = -1$.

- $f(-1) = (-1 + 2) e^1 = e \approx 2,71$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) e^{-x} = -\infty$ (produit).

- $f(x) = (x + 2) e^{-x} = \frac{x + 2}{x} \times \frac{x}{e^x}$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x} = 1$ comme limite d'une fonction rationnelle.

On sait aussi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Par produit, on déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On établit le signe de $f'(x)$ puis les variations de f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$	$+$	0	$-$
e^{-x}	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f			

$f(-1) = e$ est le maximum de la fonction f sur \mathbf{R} .

b. $f(1) = (1+2)e^{-1} = \frac{3}{e} \approx \frac{3}{2,71} < 1,2$

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, la fonction f est strictement décroissante, donc si $x > 1$, on a $f(x) < f(1)$ et donc $f(x) < 1,2$.

- 2.** La courbe représentative de la fonction f possède un point d'inflexion si la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe.

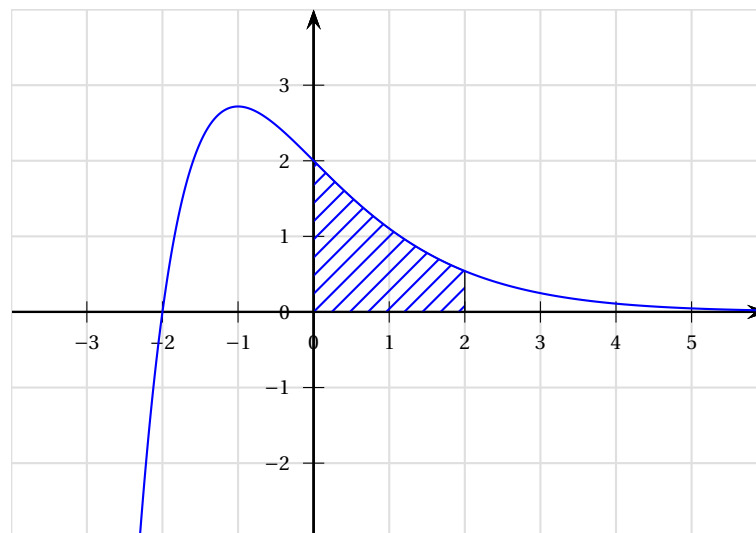
$$f'(x) = (-x-1)e^{-x} \text{ donc}$$

$$f''(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x-1) \times (-1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$f'' \text{ s'annule et change de signe en } x=0; f(0) = (0+2)e^0 = 2$$

La courbe représentative de f possède donc un point d'inflexion de coordonnées $(0; 2)$.

- 3.** On donne une allure de la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.



- 4. a.** Soit h la fonction définie sur \mathbf{R} par $h(x) = (ax+b)e^{-x}$.

La fonction h est une primitive de f si et seulement $h'(x) = f(x)$ pour tout réel x .

$$h'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times (-1) e^{-x} = (a - ax - b) e^{-x}$$

Pour que $h'(x) = f(x)$, il suffit de prendre $a = -1$ et $a - b = 2$ soit $b = -3$.

Donc la fonction h définie par $h(x) = (-x - 3) e^{-x}$ est une primitive de f sur \mathbf{R} .

$$\text{b. } \int_0^2 f(x) dx = [h(x)]_0^2 = h(2) - h(0) = ((-2 - 3) e^{-2}) - ((0 - 3) e^0) = 3 - 5e^{-2}$$

Cette intégrale est, en unités d'aire, l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe représentant f , l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 2$. (partie hachurée sur le graphique)

Partie C : Étude biostatistique

Une patiente, atteinte d'une récurrence du cancer du sein, se voit proposer un Pet Scan afin de mettre en évidence les cellules cancéreuses. On lui injecte un traceur (Fluor 18) rendant les cellules cancéreuses colorées et donc visibles à l'imagerie.

À la date $t = 0$, on injecte le traceur dans le corps de la patiente. Le niveau de radioactivité $N(t)$, en MBq (mégabecquerel), dans le corps de la patiente est donné, en fonction du temps t , en heure, par : $N(t) = 100f(t)$, où f est la fonction étudiée dans la **partie B**.

1. La valeur initiale de radioactivité dans le corps de la patiente est $N(0) = 100f(0) = 200$.

La demi-vie du traceur est donc l'instant t où $N(t) = \frac{N(0)}{2} = 100$.

$$N(t) = 100 \iff f(t) = 1; f(1) = 3e^{-1} \approx \frac{3}{2,71} > 1; f(2) = 4e^{-2} \approx \frac{4}{7,38} < 1$$

La demi-vie du traceur est donc comprise entre 1 heure et 2 heures.

2. Le niveau moyen de radioactivité dans le corps entre l'instant initial et 2 heures est :

$$\frac{1}{2-0} \int_0^2 N(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 100f(t) dt = 50 \int_0^2 f(t) dt = 50 \times (3 - 5e^{-2}) = 150 - 250e^{-2}$$

3. On considère que le niveau de radioactivité dans le corps de la patiente est insignifiant lorsqu'il est inférieur à 120 MBq.

Une heure après l'injection, le niveau de radioactivité dans le corps de la patiente est :

$$N(1) = 100f(1) = 100 \times 3e^{-1} \approx \frac{300}{2,71}. \text{ Or } 120 = \frac{120 \times 2,71}{2,71} = \frac{325,2}{2,71}.$$

Comme $\frac{300}{2,71} < \frac{325,2}{2,71}$, on peut déduire que $N(1) < 120$.

On peut donc considérer que le niveau de radioactivité dans le corps de la patiente est insignifiant une heure après l'injection.

4. On a vu dans la partie B que $f''(x) = xe^{-x}$ donc $N''(t) = 100te^{-t}$ d'où on déduit que $N''(t) > 0$ sur $]0; +\infty[$. La fonction N est donc convexe sur $]0; +\infty[$.

$N''(t) > 0$ donc la dérivée N' est croissante sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle, la fonction N est décroissante; on peut donc dire que le niveau de radioactivité diminue de moins en moins vite.