∾ Corrigé du concours à l'entrée de l'école de santé des armées ∾
6 avril 2024

Durée : 1 heure 30 minutes   Coefficient : 2

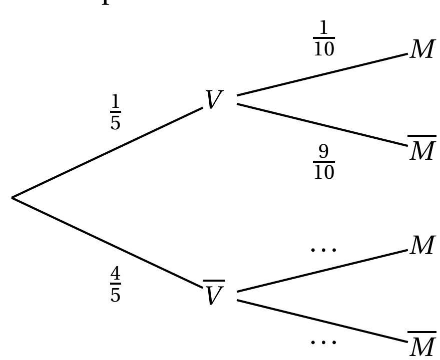
EXERCICE 1 - 6 points

QCM 1

Le prix a été multiplié par 4, donc $CM = 4$. Le coefficient multiplicateur réciproque (qui permet de revenir au prix de départ) est égal à : $CMR = \dfrac{1}{CM} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$. Ce qui correspond à une remise de 75%. **réponse C**

QCM 2

On peut dresser un arbre pondéré représentant la situation :



Nous savons d'après l'énoncé que $p_M(\overline{V}) = 5 \times p_M(V) \iff p_M(\overline{V}) \times p(M) = 5 \times p_M(V) \times p(M)$ donc $p(\overline{V} \cap M) = 5 \times p(V \cap M)$.
D'après la formule des probabilités totales, $P(M) = p(V \cap M) + p(\overline{V} \cap M) = 6 \times p(V \cap M)$
$= 6 \times p_V(M) \times p(M) = 6 \times \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{25}$ **réponse D**

QCM 3

L'équation est définie sur $]0\,;\,+\infty[$. On pose $X = \ln(x)$.
$(\ln(x))^2 + 4\ \ln(x) - 5 = 0 \iff X^2 + 4X - 5 = 0 \iff (X+5)(X-1) = 0 \iff X = -5$ ou $X = 1$
Donc $\ln(x) = 5$ ou $\ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}^{-5}$ ou $x = \mathrm{e}^{1}$ **réponse D**

QCM 4

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. $\mathrm{e}^{x^2+4x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^4} \iff \mathrm{e}^{x^2+4x} = \mathrm{e}^{-4} \iff x^2 + 4x = -4$ (croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff x^2 + 4x + 4 = 0 \iff (x+2)^2 = 0 \iff x = -2$ **réponse B**

QCM 5

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-2\mathrm{e}^x \times (1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x \times (-2\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{-2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{-2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ **réponse C**

QCM 6

Pour tout réel $x > 1$, $\sqrt{x^2+4x-5}-x = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+4x-5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x-5}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x-5}+x} = \dfrac{x^2+4x-5-x^2}{\sqrt{x^2+4x-5}+x}$

$$= \frac{4x-5}{\sqrt{x^2+4x-5}+x} = \frac{x(4-\frac{5}{x})}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}+x} = \frac{x(4-\frac{5}{x})}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}\right)+1} = \frac{4-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4-\dfrac{5}{x} = 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}}+1 = 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ **réponse D**

EXERCICE 2 - 6 points

QCM 7

Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, la fonction $f : x \mapsto 2x^3-15x^2+24x-16$ est continue et dérivable.
$\forall x \in [1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 6x^2-30x+24 = 6(x^2-5x+4) = 6(x-4)(x-1)$. Sur $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $x-4$ ce qui permet d'établir le tableau de variation suivant :

x	1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	-5	↘	-32	↗	$+\infty$

À l'aide du corollaire du TVI et du tableau de variation, on peut démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1\,;\,+\infty[$ **réponse B**

QCM 8

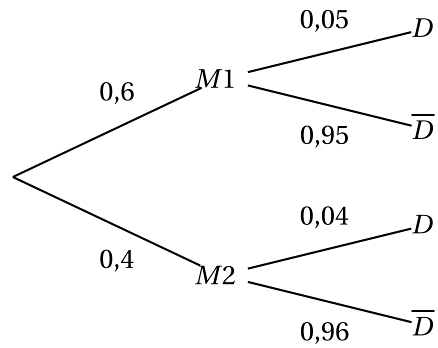
La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3+4x^2+x+10$ est continue et deux fois dérivable.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x^2+8x+1$ et $f''(x) = 4x+8$.
$f''(x) \geqslant 0 \iff \geqslant -2$. Donc la fonction f est convexe sur $]-2\,;\,+\infty[$. **réponse A**

QCM 9

Déterminons les premiers termes de la suite (u_n) :
$u_1 = 1$, $u_2 = u_1+2\times1+1 = 4 = 2^2$, $u_3 = u_2+2\times2+1 = 9 = 3^2$ et ainsi de suite.
On peut donc conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2$. Démontrons cette propriété par récurrence.
Initialisation : pour $n = 1$, $u_1 = 1 = 1^2$
Hérédité : On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $u_n = n^2$. Montrons alors que $u_{n+1} = (n+1)^2$.
$u_{n+1} = u_n+2\times n+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$. L'hérédité est démontrée. Donc d'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2$. **réponse C**

QCM 10

On peut dresser un arbre pondéré représentant la situation :



D'après la formule des probabilités totales,
$p(D) = p(D \cap M1) + p(D \cap M2) = p_{M1}(D) \times p(M1) + p_{M2}(D) \times p(M2) = 0{,}05 \times 0{,}30 + 0{,}04 \times 0{,}4 = 0{,}046$. Donc $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 0{,}954$. **réponse C**

QCM 11

Pour $x \in [1\ ;\ 3]$, $f(x)$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$ avec $u(x) = \ln(x)$. Une primitive est donc de la forme $\frac{1}{2}(u(x))^2$.

$\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^3 = \frac{1}{2}(\ln(3))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2 = \frac{1}{2}(\ln(3))^2$ **réponse C**

QCM 12

On peut considérer qu'on a une épreuve de Bernoulli : la variable X égale au nombre de personnes interrogées vaccinées suit une loi binomiale $\mathscr{B}(20, 0{,}8)$.

Ainsi, $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}2^{20} = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{20} = 1 - \frac{2^{20}}{5^{20}} = \frac{5^{20} - 2^{20}}{5^{20}} > 0{,}99$ **réponse A**

EXERCICE 3 - 8 points

1. a. Si f est solution de (E) alors $f' = af\left(1 - \frac{f}{100}\right) = af - \frac{a}{100}f^2$

Or f est strictement positive donc en divisant l'égalité précédente par f^2, on obtient : $\frac{f'}{f^2} = a\frac{1}{f} - \frac{a}{100}$.

En posant $g = \frac{1}{f}$ on a alors $g' = -\frac{f'}{f^2}$ d'où $-g' = ag - \frac{a}{100}$ donc $g' = -ag + \frac{a}{100}$ soit $g' + ag = \frac{a}{100}$

Donc g est solution de (E') : $y' + ay = \frac{a}{100}$

b. Une solution constante de (E') est : pour tout réel $t \geqslant 0$, $t \longmapsto \frac{1}{100}$.

c. D'après le théorème de superposition, la solution générale g de (E') est :

pour tout réel $t \geqslant 0$, $g(t) = K\,\mathrm{e}^{-at} + \frac{1}{100}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

d. Sachant que pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) = \dfrac{1}{g(t)} = \dfrac{1}{K\,\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{1}{100}} = \dfrac{100}{1+100K\mathrm{e}^{-at}}$.

Sachant que $f(0) = 1$ on en déduit que : $\dfrac{100}{1+100K} = 1 \iff 100K = 99 \iff K = 0{,}99$.

Donc pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) = \dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{-at}}$

2. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

$\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = 100 \times -\dfrac{-99a\mathrm{e}^{-at}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-at}\right)^2} = \dfrac{9900a\mathrm{e}^{-at}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-at}\right)^2}$

Sachant que $a > 0$, on en déduit que $f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-at} = 0$ $(a > 0)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(t) = 100$

c. D'après les variations et le calcul de la limite on en déduit que

$\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $1 \leqslant f(t) < 100$

d. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ à valeurs dans $[1\,;\,100[$. Or $50 \in [1\,;\,100[$ donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(t) = 50$ admet une unique solution, notée t_0 sur $[1\,;\,100[$.

3. a. Nous savons que $\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = af(t) - \dfrac{a}{100}f(t)^2$. La fonction f' étant continue et dérivable sur ce même intervalle, et en dérivant l'égalité précédente, on obtient :

$f''(t) = af'(t) - \dfrac{a}{100} \times 2 \times f'(t) \times f(t) = af'(t) \times \left(1 - \dfrac{1}{50}f(t)\right) = a\left(1 - \dfrac{f}{50}\right)f'$.

b. D'après les questions précédentes, nous savons que $a > 0$ et $f'(t) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ donc $f''(t)$ a le même signe que $1 - \dfrac{1}{50}f(t)$ soit le même signe que $50 - f(t)$.

Donc d'après la question **2. d.**, si $t \leqslant t_0$, $50 - f(t) \leqslant 0$.

Donc $t \leqslant t_0$, $f''(t) \geqslant 0$; si $t \geqslant t_0$, $f''(t) \leqslant 0$.

La fonction f est donc convexe sur $[0\,;\,t_0]$, et concave sur $[t_0\,;\,+\infty[$.

Le nombre de bactéries augmente de plus en plus vite de 0 à t_0, puis après, augmente de moins en moins vite pour atteindre une limite à 100 millions.

4. $f(t) = 50 \iff \dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{-at}} = 0 \iff 1 + 99\mathrm{e}^{-at} = 2 \iff 99\mathrm{e}^{-at} = 1 \iff \mathrm{e}^{-at} = \dfrac{1}{99}$

$\iff -at = \ln\left(\dfrac{1}{99}\right) = -\ln(99) \iff t_0 = \dfrac{\ln(99)}{a}$

5. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,t_0]$ est : $I = \dfrac{1}{t_0 - 0}\displaystyle\int_0^{t_0} f(t)\,\mathrm{d}t$

$$I = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \frac{100}{1+99\mathrm{e}^{-at}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \frac{100\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{e}^{at}+99}\,\mathrm{d}t = \frac{100}{t_0}\int_0^{t_0} \frac{\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{e}^{at}+99}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{100}{t_0}\left[\frac{1}{a}\ln\left(\mathrm{e}^{at}+99\right]\right)\Bigg]_0^{t_0} = \frac{100}{at_0}\left(\ln(\mathrm{e}^{at_0}+99) - \ln(100)\right) = \frac{100}{at_0}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{at_0}+99}{100}\right)$$

Or $at_0 = \ln(99)$ donc $I = \dfrac{100}{\ln(99)}\ln\left(\dfrac{2\times 99}{100}\right) = \dfrac{100}{\ln(99)}\ln\left(\dfrac{99}{50}\right)$

Le graphique ci-dessous a été réalisé avec $a = 1{,}5$.