∽ SciencesPo ADMISSION AU COLLÈGE UNIVERSITAIRE ∾

Samedi 22 février 2020

durée de l'épreuve : 3 h - coefficient 2
Les calculatrices sont autorisées.

Exercice Vrai-Faux — 12 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. **Affirmation** : le carré d'un nombre réel est toujours supérieur ou égal à ce nombre.

   On a $a^2 \geqslant a \iff a^2 - a \geqslant 0 \iff a(a-1) \geqslant 0$.

   On sait que le trinôme $a(a-1)$ est positif sauf sur l'intervalle $]0~;~1[$. l'affirmation est donc fausse.

2. **Affirmation** la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 4^{3n-1}$ est une suite géométrique.

   On a pour tout entier n :

   $u_{n+1} = 4^{3(n+1)-1} = 4^{3n+3-1} = 4^{3n-1} \times 4^3$, soit $u_{n+1} = 64u_n$: la suite (u_n) est donc géométrique de premier terme $u_0 = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$ et de raison 64.

3. On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $\dfrac{2}{3}$ et on pose

   $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ pour tout entier naturel non nul n.

   Affirmation : la suite (S_n) converge vers 9.

   On sait que quel que soit le naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$, q étant la raison de la suite. Ici on a donc $v_n = 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   Or $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n \quad (1)$, d'où $\dfrac{2}{3}S_n = v_1 + v_2 + + v_n + v_{n+1} \quad (2)$ et par différence, ligne (2) moins ligne (1) :

   $\dfrac{2}{3}S_n - S_n = v_{n+1} - v_0$ ou $-\dfrac{1}{3}S_n = 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} - 3$, soit en multipliant par -3 :

   $S_n = 9 - 9 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

   Or on sait que comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 9\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

   On a donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 9$. L'affirmation est vraie.

4. Dans le cadre d'un prêt, la première mensualité comprend 350 euros d'intérêts. Chaque mensualité comprend ensuite 2 euros de moins d'intérêts que la précédente.

   Affirmation : le montant des intérêts versés après 100 mensualités est de 25 000 euros.

   On retire donc 99 fois 2 euros : dans la dernière mensualité il y a donc :

$350 - 99 \times 2 = 350 - 198 = 152$ euros d'intérêts.

La suite des intérêts est une suite arithmétique de premier terme 350 et de raison -2.

La somme de ces intérêts est;

$S_{100} = 350 + 348 + \ldots + 152$. Écrite à l'envers :

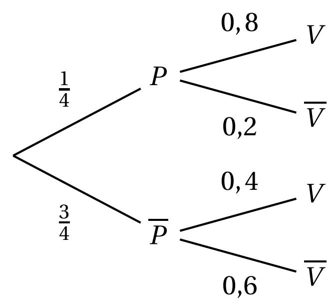
$S_{100} = 152 + 154 + \ldots + 350$ et en sommant ces deux lignes en colonnes :

$2S_n = \underbrace{502 + 502 + \ldots + 502}_{100\,\text{termes}} = 100 \times 502 = 50\,200$, d'où : $S_n = 25\,100$. L'affirmation est fausse.

5. Dans une ville où il pleut un jour sur quatre, une personne se rend à son travail à pied ou en voiture. Lorsqu'il pleut, elle se rend à son travail en voiture dans 80 % des cas et lorsqu'il ne pleut pas elle y va à pied dans 60 % des cas.

Affirmation : cette personne utilise sa voiture pour se rendre à son travail un jour sur deux.

Cette situation peut se représenter par un arbre avec P l'évènement : « il pleut » et V l'évènement : « elle se rend à son travail en voiture » :



D'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
p(V) = & \quad p(P \cap V) + p\left(\overline{P} \cap V\right) = & (1)\\
= & \quad p(P) \times p_P(V) + p\left(\overline{P}\right) \times p_{\overline{P}}(V) & (2)\\
= & \quad \frac{1}{4} \times 0,8 + \frac{3}{4} \times 0,4 & (3)\\
= & \quad 0,2 + 0,3 = 0,5. & (4)
\end{aligned}$$

L'affirmation est vraie.

6. Dans un groupe de 120 personnes, 36 sont inscrites dans un club sportif.

Affirmation : la probabilité que deux personnes choisies au hasard dans le groupe soient inscrites dans un club sportif vaut $0,088$ à 10^{-3} près.

La probabilité de choisir une personne inscrite dans un club sportif est égale à : $\dfrac{36}{120} = \dfrac{12 \times 3}{12 \times 10} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.

Soit X la variable aléatoire suivant la la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0,3$.

La calculatrice donne $p(X = 2) \approx 3 \times 10^{-16}$. l'affirmation est fausse.

7. Je lance 10 fois un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Affirmation : le nombre de fois où j'obtiens la face 3 est égal en moyenne à $\frac{10}{3}$.

Chaque face a une probabilité de sortie de $p = \frac{1}{6}$.

L'espérance de la loi de probabilité de la variable donnant la face sortie est égale à :

$n \times p = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. L'affirmation est fausse.

8. **Affirmation** : l'équation $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$. Cette fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 3x(x-1)$. Ce trinôme est positif sauf sur $]0\,;\,1[$.

Avec $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $\lim\limits_{n\to-\infty} = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$ on a le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

9. f désigne la fonction définie sur $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\ln x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Affirmation : la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x$.

On a $x > \frac{1}{\mathrm{e}} \Rightarrow \ln x > \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ou encore $\ln x > -\ln \mathrm{e}$ ou $x > -1 \iff \ln x + 1 > 0$: donc sur l'intervalle $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$, la fonction f est définie ; on peut même préciser qu'elle est positive.

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

- $f(1) = \dfrac{1}{1+\ln 1} = \dfrac{1}{1} = 1$;
- $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = -\dfrac{1}{x(\ln x+1)^2}$.

Donc $f'(1) = -\dfrac{1}{1(1+\ln 1)^2} = -1$.

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est donc :

$y - 1 = -1(x-1) \iff y = -x+1+1 \iff y = -x+2$: son coefficient directeur est donc $-1 \neq -\frac{1}{4}$. L'affirmation est fausse.

Remarque : En fait il suffisait de calculer le coefficient directeur de la tangente égal à $f'(1)$.

10. La fonction g est définie sur $]3\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

Affirmation : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction g dans un repère du plan.

Le réel x étant différent de zéro, on peut écrire :

$g(x) = \dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par quotient des limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$. ceci montre que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction g au voisinage de plus l'infini.

11. Étant donné un repère du plan, on considère la droite d passant par le point $\mathrm{A}(-2\ ;\ 1)$ et admettant $\overrightarrow{u}\,(2\ ;\ 1)$ pour vecteur directeur.

Affirmation : une équation cartésienne de d est : $x - 2y + 4 = 0$.

On a $M(x\ ;\ y) \in (d) \iff$ il existe $x\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \alpha\,\overrightarrow{u} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-(-2) & = & \alpha\times 2\\ y-1 & = & \alpha\times 1\end{array}\right.$

On en déduit que $\alpha = \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} \iff x+2 = 2(y-1) \iff x+2 = 2y-2 \iff x-2y+4 = 0$. L'affirmation est vraie.

12. Les points A, B et C ont pour coordonnées dans un repère orthonormé du plan : A(1 ; 1), B(a : 3), $C(a+2\ ;\ a+3)$ où a désigne un nombre réel.

Affirmation : les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.

On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}a-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}a+2-1\\a+3-1\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}a+1\\a+2\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (a-1)(a+1)+2(a+2) = a^2-1+2a+4 = a^2+2a+3 = (a+1)^2-1+3 = (a+1)^2+2$.

Or quel que soit le réel a, $(a+1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow (a+1)^2+2 \geqslant 2 > 0$.

Conclusion : le produit scalaire de ces deux vecteurs ne peut être nul, les vecteurs ne sont pas orthogonaux et les les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires. L'affirmation est vraie.

Problème — 8 points

Partie A

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

On a $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\times\mathrm{e}^{-x} = -\infty$ par produit de limites.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

On peut écrire $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$.

Or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{x}{\mathrm{e}^x}} = 0$.

Ce résultat montre que l'axe des abscisse est asymptote à la représentation graphique de la fonction f au voisinage de plus l'infini.

2. Après avoir calculé la dérivée de la fonction f dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$ en précisant la valeur exacte du maximum.

Comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$f'(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1-x)$.

On sait que quel soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$,donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

On en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$, donc que f est croissante sur cet intervalle, que $f'(x) < 0$ sur $]1\ ;\ +\infty[$, donc que f est décroissante sur cet intervalle et donc que $f(1) = 1 \times \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			e^{-1}		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				0

Partie B

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$: la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : soit un naturel quelconque n tel que $u_n > 0$.

D'après l'étude des variations de la fonction f de la partie A, on a $f(x) = 0 \iff x\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff x = 0$, puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$, quel que soit le réel x.

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ de 0 à e^{-1}, et donc sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) > 0$.

Conclusion quel que soit $u_n > 0$, $f(u_n) = u_{n+1} > 0$.

La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang quelconque n, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence on a donc $u_n > 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

On a pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n\mathrm{e}^{-u_n} - u_n = u_n\left(\mathrm{e}^{-u_n} - 1\right)$.

L'étude de la fonction a montré que quel que soit n, $0 < u_n = f(u_{n-1}) \leqslant 1$, d'où

$-1 \leqslant -u_n < 0$ et par croissance de la fonction exponentielle $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} < \mathrm{e}^0 = 1$.

Or $\mathrm{e}^{-u_n} < 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{-u_n} - 1 < 0$.

Comme $u_n > 0$, on a finalement $u_n\left(\mathrm{e}^{-u_n} - 1\right) = u_{n+1} - u_n < 0$, quel que soit le naturel n, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

b. On admet que la limite α de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de α.

On résout l'équation :

$f(x) = x \iff x\mathrm{e}^{-x} = x \iff \mathrm{e}^{-x} = 1$, ou $x = 0$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien on a ensuite $-x = \ln 1 \iff$ $x = 0$.

On a donc $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Partie C

On considère la suite (S_n), définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

1. Dans l'algorithme ci-dessous. u et S désignent des nombres réels et k un nombre entier. Compléter cet algorithme pour qu'à la fin de son exécution la variable S contienne S_{50}

$u \leftarrow 1$
$S \leftarrow u$
Pour k variant de 1 à 49
$\quad u \leftarrow u \times \mathrm{e}^{)u}$
$\quad S \leftarrow S + u$
Fin Pour

2. Déterminer la valeur décimale de S_{50} arrondie au millième.

La calculatrice donne $S_{50} \approx 5{,}351\,6$ soit 5,352 au millième près.