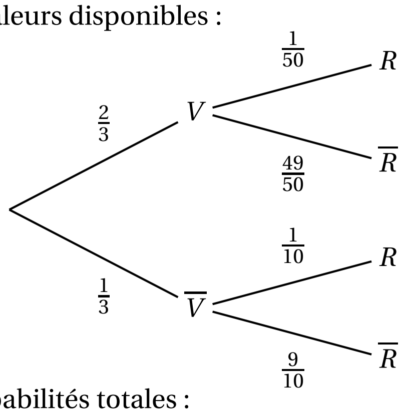
Corrigé Baccalauréat Amérique du Nord Jour 1 18 mai 2022
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : Probabilités**

Partie A

1. **a.** L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. D'après la formule des probabilités totales :

$p(R) = p(R \cap V) + p\left(R \cap \overline{V}\right) = p_V(R) \times p(V) + p_{\overline{V}}(R) \times p\left(\overline{V}\right) = \dfrac{1}{50} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{150}$

c. On cherche la probabilité : $p_R(V)$.

D'après la formule de Bayes, $p_R(V) = \dfrac{p(R \cap V)}{p(R)} = \dfrac{\dfrac{1}{50} \times \dfrac{2}{3}}{\dfrac{7}{150}} = \dfrac{2}{7}$.

2. **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{2}{3}$: $X \sim \mathscr{B}\left(20\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

b. $p(X = 10) = \dbinom{20}{10} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{20-10} \approx 0,054$.

c. $p(X \geqslant 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leqslant 9) \approx 0,962$

d. Calculons l'espérance $E(X)$ de cette loi binomiale : $E(X) = n \times p = 20 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{40}{3} \approx 13,333$

En moyenne, il se rendra à la gare en vélo 13,33 jours par mois soit 13 jours à l'unité près.

3. Calculons l'espérance de la loi de probabilité de T :

$E(t) = 0,14\times10+0,13\times11+0,13\times12+0,12\times13+0,12\times14+0,11\times15+0,10\times16+0,08\times17+0,07\times18$
$= 13,5$

Il mettra en moyenne 13 minutes et demie pour se rendre à la gare en voiture.

EXERCICE 2 (7 points) **Thèmes : suites**

On considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$

1. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20$.
   Initialisation : $T_0 = 180 \geqslant 20$. L'initialisation est vérifiée.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $T_n \geqslant 0$. Montrons que $T_{n+1} \geqslant 20$.
   $T_n \geqslant 20 \iff 0,955 \times T_n \geqslant 0,955 \times 20 \iff 0,955T_n \geqslant 19,1$
   $\iff 0,955T_n + 0,9 \geqslant 19,1 + 0,9 \iff 0,955T_n + 0,9 \geqslant 20$. Donc $T_{n+1} \geqslant 20$. L'hérédité est démontrée.
   Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20$.

   b. $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n = 0,955\ T_n + 0,9 - T_n = -0,045\ T_n + 0,9 = -0,045\left(T_n - \dfrac{0,9}{0,045}\right)$
   $= -0,045(T_n - 20)$.
   Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20$ donc $T_n - 20 \geqslant 0$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n \leqslant 0$. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

   c. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = T_n - 20$.

   a. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955 \times T_n + 0,9 - 20 = 0,955\ T_n - 19,1 = 0,955\left(T_n - \dfrac{19,1}{0,955}\right)$
   $= 0,955(T_n - 20) = 0,955\ u_n$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,955u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

   b. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n$.
   De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = T_n - 20$ donc $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0,955^n + 20$.

   c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,955^n = 0$ car $0,955 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = 20$.

   d. $T_n \leqslant 120 \iff 160\times0,955^n + 20 \leqslant 120 \iff 160\times0,955^n \leqslant 120-20 \iff 160\times0,955^n \leqslant 100$
   $\iff 0,955^n \leqslant \dfrac{100}{160} \iff 0,955^n \leqslant \dfrac{5}{8}$.
   Sachant que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on obtient :
   $\ln\left(0,955^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right) \iff n \times \ln(0,955) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$. Or $\ln(0,955) < 0$ donc,
   $n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)}$. À la calculatrice, $\dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)} \approx 10,21$ donc $n \geqslant 11$.

3. **a.** Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

   b. La fonction Python décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leqslant x$.
   temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leqslant 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

EXERCICE 3 (7 points) **Thèmes : géométrie dans l'espace**

1. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire de $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$: $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JL} = (-1)\times(-4)+2\times(-2)+0\times(-3) = 4-4=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux donc le triangle JKL est rectangle en J.

b. $\mathscr{A}_{JKL} = \dfrac{JK\times JL}{2}$.
$JK = \left\|\overrightarrow{JK}\right\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+0^2} = \sqrt{5}$ et $JL = \left\|\overrightarrow{JL}\right\| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{29}$
Donc $\mathscr{A}_{JKL} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{29}}{2} = \dfrac{\sqrt{145}}{2}$ cm^2.

c. Le triangle JKL est rectangle en J donc en appliquant la formule de la tangente, on obtient :
$\tan\left(\widehat{\text{JKL}}\right) = \dfrac{JL}{JK} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}$.
Donc $\widehat{\text{JKL}} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67,5°$

2. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k\times\overrightarrow{JL}$.

En effet le système $\left\{\begin{array}{lcl}-1 & = & k\times(-4)\\ 2 & = & k\times(-2)\\ 0 & = & k\times(-3)\end{array}\right.$ n'admet pas de solution.

$\left(\overrightarrow{JK}\ ,\ \overrightarrow{JL}\right)$ est donc une base du plan (JKL).
Calculons :
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JK} = 6\times(-1)+3\times2+(-10)\times0 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JL} = 6\times(-4)+3\times(-2)+(-10)\times(-3) = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$. C'est donc un vecteur normal au plan (JKL).

b. Le plan (JKL) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$, où $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$, on obtient : (JKL) : $6x+3y-10z+d=0$.
Or $J\in$ (JKL) donc $12+0-10+d=0$ donc $d=-2$. Donc (JKL) a pour équation
$6x+3y-10z-2=0$.

3. **a.** La droite Δ est normale au plan (JKL) donc admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, normal à (JKL). elle passe par T$(10\ ;\ 9\ ;\ -6)$ donc une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x & = & 10+6t\\ y & = & 9+3t\\ z & = & -6-10t\end{array}\right.\quad, t\in\mathbb{R}$$

b. Le projeté orthogonal H de T sur le plan (IJK) est l'unique point d'intersection de Δ et (IJK).
Ses coordonnées sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l}x = 10+6t\\ y = 9+3t\\ z = -6-10t\\ 6x+3y-10z-2=0\end{array}\right.$$

En remplaçant x, y et z dans la dernière équation, on obtient :

$6(10+6t)+3(9+3t)-10(-6-10t)-2=0 \iff 145t+145=0 \iff t=-1$

Donc $x=10+6\times(-1)=4$, $y=9+3\times(-1)=6$ et $z=-6-10\times(-1)=4$

H a pour coordonnées (4 ; 6 ; 4)

c. $\mathcal{V}_{JKLT}=\dfrac{1}{3}\mathcal{B}\times h$. La base est le triangle JKL et la hauteur est le segment $[TH]$. D'après les question précédentes :

$\overrightarrow{TH}\begin{pmatrix}-6\\-3\\10\end{pmatrix}$ donc $TH=\left\|\overrightarrow{TH}\right\|=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+10^2}=\sqrt{145}$

Donc $\mathcal{V}_{JKLT}=\dfrac{1}{3}\mathcal{B}_{JKL}\times TH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{145}}{2}\times\sqrt{145}=\dfrac{145}{6}$ cm³.

EXERCICE 3 (7 points) — Thèmes : fonction exponentielle

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ 1-\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}-\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}=\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Affirmation 1 : Vraie

2. $g(x)=\dfrac{1}{2}\iff\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{1}{2}\iff 2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x+1\iff\mathrm{e}^x=1\iff x=0$ **Affirmation 2 : Vraie**

3. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2x\mathrm{e}^{-x}+x^2\times-\mathrm{e}^{-x}=\left(2x-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

L'équation d'une tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Pour que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathcal{C}$, il faut que la courbe $\mathcal{C}$ admette une tangente d'équation $y=0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a)=0$ et $f'(a)=0$. Sachant que $\forall a\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-a}\neq 0$,

$f(a)=0\iff a^2\mathrm{e}^{-a}=0\iff a^2=0\iff a=0$.

$f'(a)=0\iff(2a-a^2)\mathrm{e}^{-a}=0\iff 2a-a^2=0\iff a(2-a)=0\iff a=0$ ou $a=2$.

Donc $a=0$. Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}$.

Affirmation 3 : Vraie

4. La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=\mathrm{e}^x\times\left(1-x^2\right)+\mathrm{e}^x\times-2x=\mathrm{e}^x\left(1-x^2-2x\right)=\left(-x^2-2x+1\right)\ \mathrm{e}^x$.

La fonction h' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ h''(x)=(-2x-2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\times\left(-x^2-2x+1\right)=\mathrm{e}^x\left(-2x-2-x^2-2x+1\right)=\left(-x^2-4x-1\right)\mathrm{e}^x$

Si $\mathcal{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $\mathrm{e}^x>0$ pour tout réel x, donc étudions le signe de $-x^2-4x-1$ sur $\mathbb{R}$.

$-x^2-4x-1$ s'annule pour $x_1=-2-\sqrt{3}$ et pour $x_2=-2+\sqrt{3}$ car $\Delta=12$.

Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

Affirmation 4 : Fausse

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}$.

D'après les croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f(x) = 1$

$\boxed{\textbf{Affirmation 5 : Fausse}}$

6. $1 + \mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x \iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 \geqslant 0 \iff (\mathrm{e}^x - 1)^2 \geqslant 0$.

Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x. $\boxed{\textbf{Affirmation 6 : Vraie}}$