

❧ Corrigé Baccalauréat Amérique du Nord Jour 1 18 mai 2022 ❧

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices

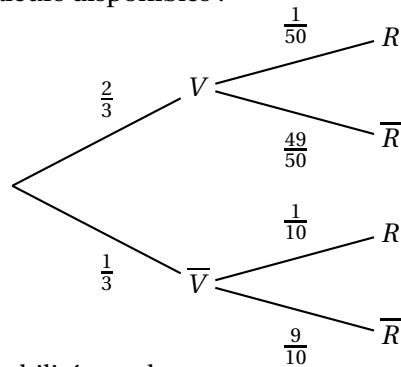
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points)

Thèmes : Probabilités

Partie A

1. a. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(R) = p(R \cap V) + p(R \cap \bar{V}) = p_V(R) \times p(V) + p_{\bar{V}}(R) \times p(\bar{V}) = \frac{1}{50} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{150}$$

c. On cherche la probabilité : $p_R(V)$.

$$\text{D'après la formule de Bayes, } p_R(V) = \frac{p(R \cap V)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{50} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}.$$

2. a. Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{3}$: $X \sim \mathcal{B}\left(20; \frac{2}{3}\right)$

b. $p(X = 10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{20-10} \approx 0,054.$

c. $p(X \geq 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0,962$

d. Calculons l'espérance $E(X)$ de cette loi binomiale : $E(X) = n \times p = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13,333$

En moyenne, il se rendra à la gare en vélo 13,33 jours par mois.

3. Calculons l'espérance de la loi de probabilité de T :

$$E(t) = 0,14 \times 10 + 0,13 \times 11 + 0,13 \times 12 + 0,12 \times 13 + 0,12 \times 14 + 0,11 \times 15 + 0,10 \times 16 + 0,08 \times 17 + 0,07 \times 18 = 13,5$$

Il mettra en moyenne 13 minutes et demie pour se rendre à la gare en voiture.

EXERCICE 2 (7 points)**Thèmes : suites**

On considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$

1. a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$.

Initialisation : $T_0 = 180 \geq 20$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $T_n \geq 20$. Montrons que $T_{n+1} \geq 20$.

$$T_n \geq 20 \iff 0,955 \times T_n \geq 0,955 \times 20 \iff 0,955T_n \geq 19,1$$

$\iff 0,955T_n + 0,9 \geq 19,1 + 0,9 \iff 0,955T_n + 0,9 \geq 20$. Donc $T_{n+1} \geq 20$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$.

- b. $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n = 0,955 T_n + 0,9 - T_n = -0,045 T_n + 0,9 = -0,045 \left(T_n - \frac{0,9}{0,045} \right)$
 $= -0,045(T_n - 20)$.

Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$ donc $T_n - 20 \geq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n \leq 0$. La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

- c. La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = T_n - 20$.

- a. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955 \times T_n + 0,9 - 20 = 0,955 T_n - 19,1 = 0,955 \left(T_n - \frac{19,1}{0,955} \right)$
 $= 0,955(T_n - 20) = 0,955 u_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,955u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

- b. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = T_n - 20$ donc $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0,955^n + 20$.

- c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,955^n = 0$ car $0,955 \in]-1; 1[$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 20$.

- d. $T_n \leq 120 \iff 160 \times 0,955^n + 20 \leq 120 \iff 160 \times 0,955^n \leq 120 - 20 \iff 160 \times 0,955^n \leq 100$
 $\iff 0,955^n \leq \frac{100}{160} \iff 0,955^n \leq \frac{5}{8}$.

Sachant que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on obtient :

$$\ln(0,955^n) \leq \ln\left(\frac{5}{8}\right) \iff n \times \ln(0,955) \leq \ln\left(\frac{5}{8}\right). \text{ Or } \ln(0,955) < 0 \text{ donc,}$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)}. \text{ À la calculatrice, } \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)} \approx 10,21 \text{ donc } n \geq 11.$$

3. a. Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

- b. La fonction Python décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leq x$.

temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leq 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

EXERCICE 3 (7 points)

Thèmes : géométrie dans l'espace

1. a. Les vecteurs \vec{JK} et \vec{JL} ont pour coordonnées : $\vec{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{JL} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Le produit scalaire de \vec{JK} et \vec{JL} : $\vec{JK} \cdot \vec{JL} = (-1) \times (-4) + 2 \times (-2) + 0 \times (-3) = 4 - 4 = 0$
 Les vecteurs \vec{JK} et \vec{JL} sont orthogonaux donc le triangle JKL est rectangle en J.

b. $\mathcal{A}_{JKL} = \frac{JK \times JL}{2}$.

$$JK = \|\vec{JK}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} \text{ et } JL = \|\vec{JL}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{JKL} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2.$$

- c. Le triangle JKL est rectangle en J donc en appliquant la formule de la tangente, on obtient :

$$\tan(\widehat{JKL}) = \frac{JL}{JK} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}. \text{ Donc } \widehat{JKL} = \arctan\left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67,5^\circ$$

2. a. Les vecteurs \vec{JK} et \vec{JL} ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\vec{JK} = k \vec{JL}$.

$$\text{En effet le système } \begin{cases} -1 & = & k \times (-4) \\ 2 & = & k \times (-2) \\ 0 & = & k \times (-3) \end{cases} \text{ n'admet pas de solution.}$$

(\vec{JK}, \vec{JL}) est donc une base du plan (JKL).

Calculons :

$$\vec{n} \cdot \vec{JK} = 6 \times (-1) + 3 \times 2 + (-10) \times 0 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal aux \vec{JK} et \vec{JL} . C'est donc un vecteur normal au plan (JKL).

- b. Le plan (JKL) a pour équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$, où $(a ; b ; c)$ sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur \vec{n} , on obtient : (JKL) : $6x + 3y - 10z + d = 0$.

Or $J \in$ (JKL) donc $12 + 0 - 10 + d = 0$ donc $d = -2$. Donc (JKL) a pour équation $6x + 3y - 10z - 2 = 0$.

3. a. La droite Δ est normale au plan (JKL) donc admet comme vecteur directeur \vec{n} , normal à (JKL). elle passe par T(10 ; 9 ; -6) donc une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x & = & 10 + 6t \\ y & = & 9 + 3t \\ z & = & -6 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- b. Le projeté orthogonal H de T sur le plan (IJK) est l'unique point d'intersection de Δ et (IJK). Ses coordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \\ 6x + 3y - 10z - 2 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x , y et z dans la dernière équation, on obtient :

$$6(10 + 6t) + 3(9 + 3t) - 10(-6 - 10t) - 2 = 0 \iff 145t + 145 = 0 \iff t = -1$$

$$\text{Donc } x = 10 + 6 \times (-1) = 4, y = 9 + 3 \times (-1) = 6 \text{ et } z = -6 - 10 \times (-1) = 4$$

H a pour coordonnées (4 ; 6 ; 4)

- c. $\mathcal{V}_{JKLT} = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$. La base est le triangle JKL et la hauteur est le segment $[TH]$. D'après les questions précédentes :

$$\overrightarrow{TH} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ donc } TH = \left\| \overrightarrow{TH} \right\| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{145}$$

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{JKLT} = \frac{1}{3} \mathcal{B}_{JKL} \times TH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6} \text{ cm}^3.$$

EXERCICE 3 (7 points)**Thèmes : fonction exponentielle**

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$$

Affirmation 1 : Vraie

$$2. g(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \iff 2e^x = e^x + 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

Affirmation 2 : Vraie

3. La fonction f est continue et dérivable sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times -e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}.$$

L'équation d'une tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Pour que l'axe des abscisses soit tangent à \mathcal{C} , il faut que la courbe \mathcal{C} admette une tangente d'équation $y = 0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$. Sachant que $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} \neq 0$,

$$f(a) = 0 \iff a^2 e^{-a} = 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0.$$

$$f'(a) = 0 \iff (2a - a^2)e^{-a} = 0 \iff 2a - a^2 = 0 \iff a(2 - a) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a = 2.$$

Donc $a = 0$. Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à \mathcal{C} .

Affirmation 3 : Vraie

4. La fonction h est continue et dérivable sur \mathbb{R} . Soit \mathcal{C}_h sa courbe représentative.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x \times (1 - x^2) + e^x \times -2x = e^x (1 - x^2 - 2x) = (-x^2 - 2x + 1) e^x.$$

La fonction h' est continue et dérivable sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = (-2x - 2)e^x + e^x \times (-x^2 - 2x + 1) = e^x (-2x - 2 - x^2 - 2x + 1) = (-x^2 - 4x - 1) e^x$$

Si \mathcal{C}_h admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $e^x > 0$ pour tout réel x , donc étudions le signe de $-x^2 - 4x - 1$ sur \mathbb{R} .

$$-x^2 - 4x - 1 \text{ s'annule pour } x_1 = -2 - \sqrt{3} \text{ et pour } x_2 = -2 + \sqrt{3} \text{ car } \Delta = 12.$$

Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

Affirmation 4 : Fausse

$$5. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^x + x} = \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{e^x}}.$$

D'après les croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Affirmation 5 : Fausse

$$6. 1 + e^{2x} \geq 2e^x \iff e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \iff (e^x - 1)^2 \geq 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x .

Affirmation 6 : Vraie