

✧ Corrigé Baccalauréat Amérique du Nord Jour 2 19 mai 2022 ✧

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

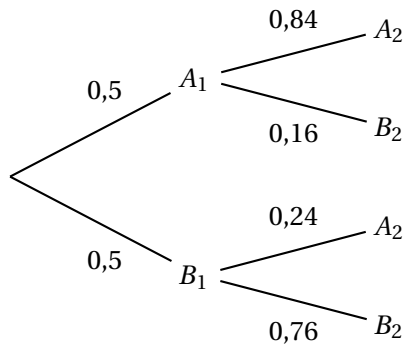
Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points)

Thèmes : probabilités, suites

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. a. Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:

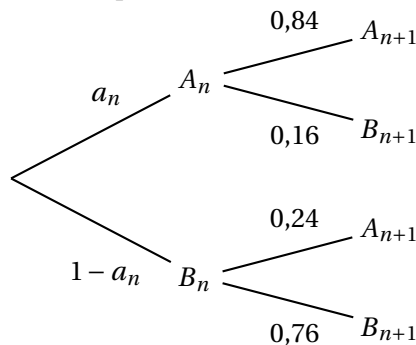
$$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1) \\ = 0,84 \times 0,5 + 0,24 \times 0,5 = 0,54. \text{ Donc } a_2 = 0,54.$$

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:

$$p_{A_2}(B_1) = \frac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \frac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \frac{0,24 \times 0,5}{0,54} \approx 0,222$$

3. a. On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.

L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n , pour tout entier naturel non nul :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) \\ = 0,84 \times p(A_n) + 0,24 \times p(B_n) = 0,84 a_n + 0,24 b_n. \text{ Or } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 1 - a_n.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 0,84 a_n + 0,24(1 - a_n) = 0,6 a_n + 0,24$$

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Initialisation : $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1} = 0,6 - 0,1 = 0,5$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Montrons que $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$.

D'après la question précédente, $a_{n+1} = 0,6 a_n + 0,24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$a_{n+1} = 0,6(0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}) + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6 \times 0,6^{n-1} + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$. On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^{n-1} = 0$ car $0,6 \in]-1 ; 1[$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$.

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

e. Résolvons : $a_n \geq 0,599$. $a_n \geq 0,599 \iff 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geq 0,599$
 $\iff -0,1 \times 0,6^{n-1} \geq -0,001 \iff 0,6^{n-1} \leq \frac{-0,001}{-0,1} \iff 0,6^{n-1} \leq \frac{1}{100}$.

Sachant que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* ,

$0,6^{n-1} \leq \frac{1}{100} \iff \ln(0,6^{n-1}) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right) \iff (n-1) \times \ln(0,6) \leq -\ln(100)$. Or $\ln(0,6) < 0$,

donc $n-1 \geq \frac{-\ln(100)}{\ln(0,6)} \iff n \geq 1 - \frac{2\ln(10)}{\ln(0,6)}$.

À la calculatrice, $1 - \frac{2\ln(10)}{\ln(0,6)} \approx 10,02$ donc $n \geq 11$.

La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à 0,599 à partir du 11-ième jour.

EXERCICE 2 (7 points)

Thèmes : fonctions, fonction exponentielle

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3 ; 4]$.

$\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) > 0$.
 Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3 ; 4]$ à valeurs dans $[-68 ; 37]$. Or $0 \in [-68 ; 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[-3 ; 4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. D'après les variations de la fonction p , et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3 ; 4]$:

x	-3	α	4
$p(x)$	-	0	+

Partie B

1. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[-3 ; 4]$ (car $\forall x \in [-3 ; 4], 1 + x^2 \neq 0$).

$\forall x \in [-3 ; 4], f'(x) = \frac{e^x \times (1 + x^2) - e^x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1 + x^2)^2} = \frac{(x - 1)^2 e^x}{(1 + x^2)^2}$.

b. $f'(x) = 0 \iff \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff (x-1)^2 e^x \iff (x-1)^2 \iff x-1 = 0 \iff x = 1.$

Et $f(1) = \frac{e}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, \mathcal{C}_f admet une tangente horizontale d'équation $y = \frac{e}{2}$.

2. a. Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :
- convexe sur $[-3 ; 0]$;
 - concave sur $[0 ; 1]$;
 - convexe sur $[1 ; 4]$.

Donc \mathcal{C}_f admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b. $\forall x \in [-3 ; 4] : f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3 ; 4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3 ; 4], (1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3	α	1	4	
$p(x)$	-	0	+	+	
$x-1$	-		-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc \mathcal{C}_f admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

EXERCICE 3 (7 POINTS)

THÈMES : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

En utilisant le repère fourni $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points notés ont pour coordonnées : $A(6 ; 0 ; 2)$, $B(6 ; 0 ; 0), C(6 ; 8 ; 0), D(0 ; 8 ; 0), E(0 ; 0 ; 4), F(6 ; 0 ; 4), G(6 ; 8 ; 4), H(0 ; 8 ; 4), R(6 ; 3 ; 4), T(3 ; 0 ; 4)$ et $S(3 ; \frac{5}{2} ; 0)$

1. a. Les vecteurs \vec{AR} et \vec{AT} ont pour coordonnées : $\vec{AR} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AT} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$AR = \|\vec{AR}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ et $AT = \|\vec{AT}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\|\vec{AR}\| = \|\vec{AT}\|$ donc le triangle ART est isocèle en A.

b. $\vec{AR} \cdot \vec{AT} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 4$

c. Utilisons la formule du produit scalaire : $\vec{AR} \cdot \vec{AT} = \|\vec{AR}\| \times \|\vec{AT}\| \times \cos(\widehat{RAT})$

donc $\cos(\widehat{RAT}) = \frac{\vec{AR} \cdot \vec{AT}}{\|\vec{AR}\| \times \|\vec{AT}\|} = \frac{4}{\sqrt{13}^2} = \frac{4}{13}$ donc $\widehat{RAT} = \arccos\left(\frac{4}{13}\right) \approx 72,1^\circ$

2. a. Les vecteurs \vec{AR} et \vec{AT} ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\vec{JK} = k \times \vec{JL}$.

En effet le système $\begin{cases} 0 = k \times (-3) \\ 3 = k \times 0 \\ 2 = k \times 2 \end{cases}$ n'admet pas de solution. Donc ils définissent une

base du plan (ART). Calculons :

$\vec{n} \cdot \vec{AR} = 2 \times 0 + (-2) \times 3 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AT} = 2 \times (-3) + (-2) \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$.
Donc $\vec{n} \perp \vec{AR}$ et $\vec{n} \perp \vec{AT}$ donc \vec{n} est normal à tout vecteur du plan (ART), donc \vec{n} est un vecteur normal au plan (ART).

b. Le plan (ART) a pour équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$, où $(a ; b ; c)$ sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur \vec{n} , on obtient : (ART) : $2x - 2y + 3z + d = 0$.

Or $A \in (ART)$ donc $12 - 0 + 6 + d = 0$ donc $d = -18$.

Donc le plan (ART) a pour équation $2x - 2y + 3z - 18 = 0$.

3. a. La droite Δ est orthogonale au plan (ART), donc elle admet comme vecteur directeur le vecteur \vec{u} , vecteur normal à ce plan. Elle passe par le point $S\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 0 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

b. Les coordonnées du point L sont les uniques solutions du système :

$$(S) \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \\ 2x - 2y + 3z - 18 = 0 \end{cases} \quad \text{En remplaçant } x, y \text{ et } z \text{ dans la dernière équation, on obtient :}$$

$$2x - 2y + 3z - 18 = 0 \iff 2(3 + 2k) - 2\left(\frac{5}{2} - 2k\right) + 3 \times 3k - 18 = 0 \iff 17k - 17 = 0 \iff k = 1$$

Donc $x = 3 + 2k = 5$, $y = \frac{5}{2} - 2k = \frac{1}{2}$ et $z = 3k = 3$. Le point L a pour coordonnées $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$.

4. Le milieu K de [EH] a donc pour coordonnées (0 ; 4 ; 4). N a pour coordonnées (0 ; 8 - 4t ; 4t).

Pour $t \in [0 ; 1]$, les vecteurs \vec{DK} et \vec{ND} ont pour coordonnées : $\vec{DK} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{ND} \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$.

On remarque alors que $\vec{DN} = t \times \vec{DK}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires, donc les points D, K et N sont alignés.

Pour vérifier que N est un point du segment [DK], montrons que $\vec{NK} \cdot \vec{ND} \leq 0$:

$$\vec{NK} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 + 4t \\ 4 - 4t \end{pmatrix} \text{ et } \vec{ND} \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ -4t \end{pmatrix}$$

donc $\vec{NK} \cdot \vec{ND} = 0 \times 0 + (-4 + 4t) \times 4t + (4 - 4t) \times (-4t) = 32t^2 - 32t = 32t(t - 1)$.

$t \in [0 ; 1]$ donc $32t(t - 1) \leq 0$ donc N est un point du segment [DK].

5. Les vecteurs \overrightarrow{SL} et \overrightarrow{SN} ont pour coordonnées : $\overrightarrow{SL} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SN} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{11}{2} - 4t \\ 4t \end{pmatrix}$

Les vecteurs \overrightarrow{SL} et \overrightarrow{SN} sont orthogonaux donc $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$.

$$\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0 \iff 2 \times (-3) + (-2) \times \left(\frac{11}{2} - 4t\right) + 3 \times 4t = 0 \iff 20t - 17 = 0 \iff t = \frac{17}{20}.$$

Le point N aura alors pour coordonnées : $N \left(0; 8 - 4 \times \frac{17}{20}; 4 \times \frac{17}{20}\right)$ soit $N \left(0; \frac{23}{5}; \frac{17}{5}\right)$

EXERCICE 4 (7 points)**Thème : fonction logarithme népérien, probabilités**

1. $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) = \ln(3^2) + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \ln(3^2) = 1\frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) = -\frac{1}{2}\ln(3)$

Réponse d

2. Donnons en premier le domaine de définition. Il faut que $x > 0$ et $x > 10$. Donc $\mathcal{D}_f =]10; +\infty[$.
Dans \mathcal{D}_f , $\ln(x) + \ln(x - 10) = \ln(3) + \ln(7) \iff \ln(x(x - 10)) = \ln(3 \times 7) \iff x(x - 10) = 21$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ou

$$x^2 - 10x - 21 = 0. \Delta = 184 > 0, \text{ donc ce trinôme admet deux solutions. Or } \sqrt{\Delta} = \sqrt{184} = \sqrt{4 \times 46} = 2\sqrt{46}.$$

$$\text{Les deux solutions sont : } x_1 = \frac{10 - 2\sqrt{46}}{2} = 5 - \sqrt{46} \text{ et } x_2 = \frac{10 + 2\sqrt{46}}{2} = 5 + \sqrt{46}.$$

$$\text{Or } 5^2 = 25 < 46, \text{ donc } 5 < \sqrt{46} \iff 5 - \sqrt{46} < 0 \text{ et } 5 - \sqrt{46} \notin \mathcal{D}_f.$$

$$\text{Par contre } \sqrt{46} > 5 \Rightarrow 5 + \sqrt{46} > 5 + 5 = 10, \text{ donc } x_2 \in \mathcal{D}_f.$$

La seule solution réelle est donc $5 + \sqrt{46}$.

Réponse c

3. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par l'expression $f(x) = x^2(-1 + \ln(x))$. Elle est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2x \times (-1 + \ln(x)) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x \ln(x) + x = -x + 2x \ln(x) = x(2 \ln(x) - 1).$$

$$f'(x) = 0 \iff x(2 \ln(x) - 1) = 0 \iff 2 \ln(x) - 1 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \text{ La tangente au point d'abscisse } a = \sqrt{e} \text{ est horizontale. Son équation est donnée par : } y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

$$\text{Sachant que } f'(\sqrt{e}) = 0 \text{ et que } f(\sqrt{e}) = \sqrt{e}^2(-1 + \ln(\sqrt{e})) = e \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e. \text{ L'équation de cette tangente horizontale est donc : } y = -\frac{1}{2}e.$$

Réponse d

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.

Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 5 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. Si on note par X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaunes tirés, alors X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et

$$p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} : X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right)$$

$$\text{Ainsi } p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{5-2} = 0,3456 \approx 0,346.$$

Réponse b

5. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$:

$$X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right).$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922.$$

Réponse d

6. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$:

$$X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right).$$

L'espérance d'une loi binomiale est égale à : $E(X) = np$.

$$\text{Ici, } E(x) = 5 \times \frac{2}{5} = 2.$$

Réponse c