

∞ Corrigé du baccalauréat Centre étrangers 12 mai 2022 ∞

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points)

Thèmes : fonction exponentielle

1. Soit f la fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} , définie par $x \mapsto \frac{x}{e^x}$.

En utilisant la formule de la dérivée d'un quotient, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x} = (1-x)e^{-x}.$$

Réponse c

2. La courbe représentative donnée est celle de f'' . Avec la précision permise par ce graphique, on peut affirmer que f'' est positive sur $[-3; -1]$, négative sur $[-1; 1]$ et s'annule pour $x = -1$.

Cela signifie donc que f' est croissante sur $[-3; -1]$ puis décroissante sur $[-1; 1]$. Donc la fonction f' admet un maximum en $x = -1$.

Réponse d

3. Les fonctions F proposées sont continues et dérivables sur \mathbb{R} . Dérivons chacune d'entre-elles.
 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{a. } F'(x) &= -\frac{1}{6} \left(3x^2 e^{-x^2} + (x^3 + 1) \times -2x e^{-x^2} \right) = -\frac{1}{6} e^{-x^2} (3x^2 - 2x^3 - 2x) \\ &= -\frac{1}{6} e^{-x^2} (-2x^3 + 3x^2 - 2x) \end{aligned}$$

$$\text{b. } F'(x) = -\frac{1}{4} \left(4x^3 \times e^{-x^2} + x^4 \times -2x e^{-x^2} \right) = -\frac{1}{4} e^{-x^2} (4x^3 - 2x^5)$$

$$\text{c. } F'(x) = -\frac{1}{2} \left(2x \times e^{-x^2} + (x^2 + 1) \times -2x e^{-x^2} \right) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (2x - 2x^3 - 2x) = x^3 e^{-x^2}$$

$$\text{d. } F'(x) = (6x - 8x^3) \times e^{-x^2} + (3x^2 - 2x^4) \times -2x e^{-x^2} = (4x^5 - 14x^3 + 6x) e^{-x^2}$$

Réponse c

4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Réponse b

5. La fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc elle admet des primitives notées F . De plus $f(x)$ est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x + 1$. En remarquant que $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1}$, on peut alors écrire que pour tout réel x , $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Sachant que $F(0) = 1$ alors

$$\frac{1}{2} e^1 + k = 1 \iff k = 1 - \frac{1}{2} e. \text{ Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + 1 - \frac{1}{2} e.$$

Réponse c

6. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f est concave sur $[-2; 1]$, convexe sur $[1; 4]$ et $f''(1) = 0$ (point d'inflexion). f'' est donc négative sur $[-2; 1]$, positive sur $[1; 4]$ s'annulant en 1.

Réponse a

EXERCICE 2 (7 points)

Thème : fonctions logarithme et suites.

1. • On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on a par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. a. La fonction f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. En utilisant le formule de la dérivée d'un produit, $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$
- b. $f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$.
 Dans le tableau : $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) + 1 = -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1} > 0$

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	1		$1 - e^{-1} \approx 0,632$	$+\infty$

- c. $f(1) = 1$. D'après les variations de la fonction f ,
- $\forall x \in]0; e^{-1}[$, $f(x) \in [1 - e^{-1}; 1[$;
 - $\forall x \in [e^{-1}; 1]$, $f(x) \in [1 - e^{-1}; 1]$.
- Donc $\forall x \in]0; 1]$, $f(x) \in [1 - e^{-1}; 1]$. Or $1 - e^{-1} > 0$ donc $f(x) \in]0; 1]$ pour tout réel x dans $]0; 1]$.
3. a. L'équation de la tangente (T) à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 a pour équation :
 $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
 Avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, on en déduit l'équation de (T) : $y = x - 1 + 1 = x$, soit
 $M(x; y) \in (T) \iff y = x$.
- b. Nous savons que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x) + 1$.
 La fonction f' est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$, et $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc f est convexe sur $]0; +\infty[$.
- c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier \mathcal{C}_f est au-dessus de (T) . Donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geq x$.
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0; 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
- a. Montrons par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier naturel n .
Initialisation : on a $u_0 \in]0; 1[$, soit $0 < u_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 < u_n < 1$.
 On a vu à la question 2. b. que si $0 < x < 1$, alors $0 < f(x) < 1$.
 Donc si $0 < u_n < 1$, alors $0 < f(u_n) < 1$, soit $0 < u_{n+1} < 1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
- b. D'après la question 3.c, pour tout réel x positif, $f(x) > x$.
 De plus pour tout entier naturel n , $u_n > 0$
 Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$ donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.
- c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée l .

EXERCICE 3 (7 points)

Thème : géométrie dans espace.

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} . Avec $A(3 ; -2 ; 2)$, $B(6 ; 1 ; 5)$, $C(6 ; -2 ; -1)$ et $D(0 ; 4 ; -1)$, on obtient : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour que les points A, B, C et D soient coplanaires, il faut que (par exemple) le vecteur \vec{AD} soit une combinaison linéaire des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} . Existe-t-il un couple de réels $(a ; b)$ tel que $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$? Cette égalité vectorielle se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 3a+3b = -3 \\ 3a = 6 \\ 3a-3b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = -1 \\ a = 2 \\ a-b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \\ -b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

C'est impossible. Donc le vecteur \vec{AD} ne peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} . Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2. Calculons $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3) = 9 - 9 = 0$. Donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.

Le triangle ABC est rectangle en A .

3. Calculons $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$:

$$\vec{AD} \cdot \vec{AB} = (-3) \times 3 + 6 \times 3 + (-3) \times 3 = -9 + 18 - 9 = 0$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AC} = (-3) \times 3 + 6 \times 0 + (-3) \times (-3) = -9 + 9 = 0$$

Donc le vecteur \vec{AD} est orthogonal aux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} , donc il est aussi orthogonal à toute combinaison linéaire des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} , donc orthogonal à tout vecteur du plan (ABC) .

4. Les questions précédentes permettent d'affirmer que le point A est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) . Donc $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times AD$.

$$\|\vec{AD}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Donc } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27 \text{ unités de volume.}$$

5. Soit $H(5 ; 0 ; 1)$.

- a. Les coordonnées des vecteurs \vec{BH} , \vec{BC} et \vec{BD} sont :

$$\vec{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \vec{BD} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il un couple de réels $(\alpha ; \beta)$ tel que $\vec{BH} = \alpha\vec{BC} + \beta\vec{BD}$? Cette égalité vectorielle est équivalente et permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} -6\beta = -1 \\ -3\alpha + 3\beta = -1 \\ -6\alpha - 6\beta = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{6} \\ -3\alpha = -1 - \frac{3}{6} \\ -6\alpha = -4 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{6} \\ -3\alpha = -\frac{3}{2} \\ 6\alpha = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{6} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} . \text{ Donc } \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}.$$

- b. D'après la question précédente, Le vecteur \overrightarrow{BH} peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux vecteurs non-colinéaires du plan (BCD) . On peut donc affirmer que le point H appartient au plan (BCD) . Montrons maintenant que le vecteur \overrightarrow{AH} est normal au plan (BCD) , c'est-à-dire que le vecteur \overrightarrow{AH} est orthogonal à une base du plan (BCD) , c'est-à-dire orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{BD} .

$$\text{On a : } \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 0 + 2 \times (-3) + (-1) \times 6 = -6 + 6 = 0$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \times (-6) + 2 \times 3 + (-1) \times (-6) = -12 + 6 + 6 = 0$$

Donc \overrightarrow{AH} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{BD} , donc à toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs, donc à tout vecteur du plan (BCD) . Donc H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) .

- c. La distance du point A au plan (BCD) est égale à $\|\overrightarrow{AH}\|$:

$$\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ unités de longueur.}$$

6. $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times AH$ d'où $\mathcal{A}_{BCD} = \frac{3 \times V_{ABCD}}{AH}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{AHC} = \frac{3 \times 27}{3} = 27 \text{ unités d'aire.}$$

EXERCICE 4 (7 points)

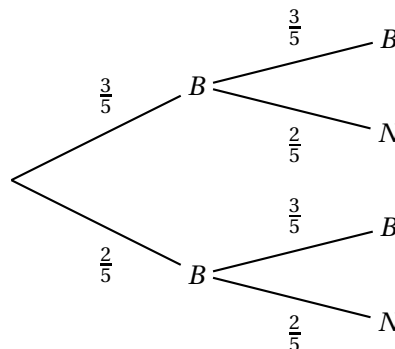
Thème : probabilités.

1. On note par

- B l'évènement : « on tire un jeton de couleur blanche » ;
- N l'évènement : « on tire un jeton de couleur noire ».

Ainsi, $p(B) = \frac{3}{5}$ et $p(N) = \frac{2}{5}$

a. L'arbre complété :



- b. Pour perdre 9 euros, il faut avoir tiré deux jetons blancs.

Sachant qu'il s'agit de deux tirages successifs avec remise, et en notant X la variable aléatoire donnant le gain du joueur, on a :

$$p(X = -9) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

2. a. On considère à présent qu'il y a 3 jetons blancs et N jetons noirs, pour un total de $N + 3$ jetons. On effectue toujours deux tirages avec remise d'un jeton. On note par X la variable aléatoire donnant le gain du joueur. Donc $X \in \{-9; -1; 5\}$

- Pour perdre 9 euros, il faut tirer deux jetons blancs : $P(X = -9) = \left(\frac{3}{N+3}\right)^2 = \frac{9}{(N+3)^2}$
- Pour perdre un euro il faut tirer deux jetons noirs : $P(X = -1) = \left(\frac{N}{N+3}\right)^2 = \frac{N^2}{(N+3)^2}$
- pour gagner cinq euros, il faut tirer un jeton de chaque couleur (B+N ou N+B) :

$$P(X = 5) = 2 \times \frac{3}{N+3} \times \frac{N}{N+3} = \frac{6N}{(N+3)^2}$$

La loi de probabilités est donc :

$X = x_i$	-9	-1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{(N+3)^2}$	$\frac{N^2}{(N+3)^2}$	$\frac{6N}{(N+3)^2}$

- b. $-x^2 + 30x - 81 > 0 \iff x^2 - 30x + 81 < 0$. Les racines du trinôme $x^2 - 30x + 81$ sont $x = 3$ et $x = 27$. Donc en utilisant les signes du trinôme du second degré, $-x^2 + 30x - 81 > 0 \iff x \in]3; 27[$.

- c. Calculons l'espérance de cette loi de probabilité :

$$E(X) = (-9) \times \frac{9}{(N+3)^2} + (-1) \times \frac{N^2}{(N+3)^2} + 5 \times \frac{6N}{(N+3)^2} = \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N+3)^2}.$$

Le jeu est favorable au joueur si et seulement si $E(X) > 0$.

$E(X) > 0 \iff -N^2 + 30N - 81 > 0 \iff N \in]3; 27[$ donc $4 \leq N \leq 26$ ($N \in \llbracket 4; 26 \rrbracket$) : il faut donc entre 4 et 26 jetons noirs (4 et 26 compris) pour que le jeu soit favorable au joueur.

- d. Le gain moyen (ou l'espérance) est maximal lorsque la fonction $f : N \mapsto \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N+3)^2}$ est maximale, c'est-à-dire lorsque $f'(N) = 0$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$. Pour $N \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(N) &= \frac{(-2N + 30) \times (N+3)^2 - 2(N+3) \times (-N^2 + 30N + 81)}{(N+3)^4} = \\ &= \frac{(-2N + 30)(N+3) - 2(-N^2 + 30N + 81)}{(N+3)^3} = \frac{-2N^2 - 6N + 30N + 90 + 2N^2 - 60N + 162}{(N+3)^3} = \\ &= \frac{-36N + 252}{(N+3)^2} = \frac{-36(N-7)}{(N+3)^2} \end{aligned}$$

$f'(N) = 0 \iff N = 7$. Le gain moyen du joueur est maximal lorsque dans l'urne il y a 7 jetons noirs et 3 jetons blancs.

3. Dans l'urne il y a 7 jetons noirs ($N = 7$) et 3 jetons blancs, pour un total de 10 jetons. La probabilité de gagner 5 euros est égale à $p = \frac{6 \times 7}{10^2} = \frac{21}{50} = 0,42$.

On répète ce jeu pour 10 personnes. On note par Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes gagnant 5 euros. Ainsi $Y \in [0; 10]$. Y suit une loi binomiale (expérience de Bernoulli n'ayant que deux issues et se répétant indépendamment et à l'identique n fois) de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{21}{50}$: $Y \sim \mathcal{B}\left(10; \frac{21}{50}\right)$

$$P(Y \geq 0) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{29}{50}\right)^{10} \approx 0,996$$

Donc la probabilité d'avoir au moins un gagnant à 5 euros est d'environ 0,996. C'est donc un événement (presque) certain.