Baccalauréat Centres étrangers (groupe 1) - 5 juin 2024

Jour 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 — 5 points

Partie A

1. f est dérivable sur son ensemble de définition, en tant que fraction rationnelle.

$$\forall x \in [0\,;\,1],\quad f'(x) = \frac{0,96\times(0,93x+0,03)-(0,96x\times 0,93)}{(0,93x+0,03)^2}$$
$$= \frac{0,8928x+0,0288-0,8928x}{(0,93x+0,03)^2}$$
$$= \frac{0,0288}{(0,93x+0,03)^2}$$

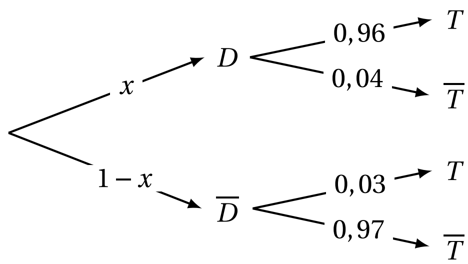
On arrive donc bien à l'expression demandée.

2. On a une fonction dérivée qui est le quotient d'un numérateur strictement positif par un dénominateur qui est le carré d'un réel non nul, donc strictement positif également, donc pour tout x dans $[0\,;\,1]$, $f'(x)$ est strictement positif.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

Partie B

1. On a l'arbre suivant :



2. Ici, on nous demande de déterminer : $P(D\cap T)$

$P(\mathrm{D}\cap\mathrm{T}) = P(D)\times P_D(T) = x\times 0,96 = 0,96x.$

3. Les évènements D et $\overline{D}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$P(T) = P(D\cap T)+P(\overline{D}\cap T)$$
$$= 0,96x+(1-x)\times 0,03$$
$$= 0,96x+0,03-0,03x$$
$$= 0,93x+0,03$$

On arrive bien à la probabilité annoncée.

4. Dans cette question, on veut calculer $P_T(D)$.

Par définition des probabilités conditionnelles, on a : $P_T(D) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)}$.

D'après les questions précédentes, cela donne : $P_T(D) = \dfrac{0,96x}{0,93x + 0,03} = f(x)$.

On est, dans cette question, avec 50 sportifs dopés sur les 1 000 testés, donc en choisissant un sportif au hasard, on est en situation d'équiprobabilité et donc la probabilité qu'un sportif soit dopé est, pour cette question $x = \dfrac{50}{1000} = 0,05$.

La probabilité demandée est donc bien $f(0,05) = \dfrac{0,96 \times 0,05}{0,93 \times 0,05 + 0,03} = \dfrac{32}{51} \approx 0,627$ soit environ 0,63 au centième près.

5. **a.** La valeur prédictive positive du test est donc la probabilité $P_T(D)$. D'après la question **4. a.**, pour toute probabilité x dans $[0 ; 1]$, on a : $P_T(D) = f(x)$.

On veut donc résoudre, dans $[0 ; 1]$, l'inéquation : $f(x) \geqslant 0,9$.

$$\begin{aligned}
f(x) \geqslant 0,9 &\iff \frac{0,96x}{0,93x + 0,03} \geqslant 0,9 \\
&\iff 0,96x \geqslant 0,9(0,93x + 0,03) \quad \text{car sur } [0 ; 1], \quad 0,93x + 0,03 > 0 \\
&\iff (0,96 - 0,9 \times 0,93)x \geqslant 0,9 \times 0,03 \\
&\iff 0,123x \geqslant 0,027 \\
&\iff x \geqslant \frac{27}{123} = \frac{9}{41}
\end{aligned}$$

C'est donc pour x supérieur à $\dfrac{9}{41} \approx 0,22$ que la valeur prédictive positive du test sera supérieure ou égale à 0,9.

b. Si on accepte comme vraie l'affirmation « les sportifs les plus performants [sont les] plus fréquemment dopés », alors le fait de restreindre la population testée aux sportifs les plus performants doit avoir pour conséquence de faire augmenter x, la proportion de sportifs dopés dans la population testée.

Comme la valeur prédictive positive est donnée par $f(x)$ et que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$, plus x augmente, plus $f(x)$ augmente et donc plus on teste une population où la proportion de dopés est élevée (ce qui est le cas si on ne teste que les sportifs les plus performants), meilleure est la valeur prédictive positive du test.

EXERCICE 2 — 5 points

1. **a.** Résolvons, dans $[0 ; 1]$, l'équation demandée :

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} = x \\
&\iff 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \\
&\iff x(2\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} = 1 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2} \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2)
\end{aligned}$$

Or, 0 et $\ln(2)$ sont deux réels dans $[0; 1]$ (en effet, la stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}^{*+}$ donne : $1 < 2 < \mathrm{e} \implies 0 < \ln(2) < 1$).

L'équation a donc deux solutions dans $[0 ; 1]$: 0 et $\ln(2)$.

b. f est dérivable sur $[0~;~1]$, en tant que composée et produit de fonctions qui pourraient être définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:
$\forall x \in [0;1]$, $\quad f'(x) = 2 \times \text{e}^{-x} + (2x) \times (-\text{e}^{-x}) = (2-2x)\text{e}^{-x} = 2(1-x)\text{e}^{-x}$.
On arrive donc à l'expression demandée.

c. On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On a : $\quad f(0) = 2 \times 0\text{e}^{-0} = 0 \quad$ et $\quad f(1) = 2 \times 1\text{e}^{-1} = 2\text{e}^{-1}$.
On peut donc établir le tableau de variations de la fonction :

x	0		1
signe de 2		$+$	
signe de $(1-x)$		$+$	0
signe de e^{-x}		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0
variations de f	0		2e^{-1}

2. **a.** *Initialisation :* Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f(0,1) = 2 \times 0,1\text{e}^{-0,1} \approx 0,18$.
On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $\quad 0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose que l'inégalité $\quad 0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1 \quad$ est vraie.
Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :
Par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1 &\implies f(0) \leqslant f(u_k) < f(u_{k+1}) \leqslant f(1) \\
&\qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [0;1] \\
&\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 2\text{e}^{-1} \\
&\qquad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n) \\
&\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 1 \\
&\qquad \text{car } 2\text{e}^{-1} \approx 0,74 < 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la véracité de l'inégalité est héréditaire.

Conclusion : L'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

b. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est donc convergente, vers une limite ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0;1]$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0~;~1]$.

D'après la question **1. a.**, cette équation n'a que deux solutions dans $[0;1]$: 0 et $\ln(2)$, or la suite est (strictement) croissante, donc minorée par son premier terme : $u_0 = 0,1$, donc la limite ne saurait être inférieure à 0,1 : la possibilité d'avoir $\ell = 0$ est donc écartée, et finalement, l'unique valeur possible pour ℓ est donc $\ln(2)$.

La suite (u_n) converge donc vers $\ln(2)$.

4. **a.** La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$, donc elle est majorée par $ln(2)$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant \ln(2) \implies \ln(2) - u_n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, la différence $\ln(2) - u_n$ est bien positive.

b. Un terme de la suite (u_n) sera donc toujours une valeur approchée par défaut de $\ln(2)$. Si on veut que la valeur approchée soit à 10^{-4} près, cela signifie que la différence entre u_n, la valeur approchée, et $\ln(2)$ doit être inférieure ou égale à 10^{-4}.

On va donc explorer les termes consécutifs de la suite (u_n) tant que $\ln(2) - u_n > 0,0001$, de sorte que la boucle s'interrompra dès que la différence deviendra inférieure ou égale à $10^{-4} = 0,0001$.

Le script ci-dessous convient (à condition d'avoir importé les fonctions `exp` et `log` qui est la fonction logarithme népérien, de la librairie `math`, au préalable).

On a dans ce corrigé ajouté les deux lignes qui rendent le programme exécutable

```
from math import exp
from math import log as ln
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2) - u > 0.0001:
    n=n+1
    u=2*u*exp(-u)
  return(u,n)
```

Remarque : on peut aussi importer la constante d'Euler de la librairie maths et utiliser une variante : `from math import e` en lieu et place de la première ligne et `u=2*u*e**(-u)` ou `u=2*u/(e**u)` pour l'avant dernière.

c. $n = 11$

EXERCICE 3 — 5 points

1. Soit $f(x) = k$ une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ solution de (E_0).

On a donc $f' = f$ soit $0 = k$.

L'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est donc la fonction nulle.

2. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Pour tout réel x on a : $h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$.

D'autre part : $h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = \cos(x) - 2\sin(x)$

d'où pour tout réel x, $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$, c'est à dire, h est solution de l'équation différentielle (E).

4. Supposons que f soit une solution de (E).

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned}(f-h)'(x) = f'(x) - h'(x) &\implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - (h(x) - \cos(x) - 3\sin(x))\\ &\quad \text{car } f \text{ et } h \text{ sont solutions de } (E)\\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h(x) + \cos(x) + 3\sin(x)\\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - h(x) = (f-h)(x)\end{aligned}$$

Donc $f - h$ est solution de (E_0)

Réciproquement : supposons que $f - h$ soit solution de (E_0)

On a donc $(f-h)'(x) = f(x) - h(x)$ soit $f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$

D'où : $f'(x) = f(x) - h(x) + h'(x) = f(x) - h(x) + h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ car h est solution de (E)

Donc : $f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ c'est à dire f est solution de (E).

Conclusion : f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).

5. On a donc $f(x) - h(x) = C\mathrm{e}^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

Toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions

$f(x) = C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$

6. g est solution de l'équation différentielle (E) donc il existe un réel C tel que

$g(x) = C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.

De plus $g(0) = 0$ donc $g(0) = C\mathrm{e}^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$.

D'où $C \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 0 \iff C = -2$

On a donc : $g(x) = -2\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.

7. Calculons : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x$

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right)\mathrm{d}x = \Big[-2\mathrm{e}^x - \cos(x) + 2\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \left(-2\mathrm{e}^0 - \cos(0) + 2\sin(0)\right)$

$I = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2 \times 1 - (-2 - 1 + 2 \times 0) = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3 = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 5$

EXERCICE 4 — 5 points

1. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\3-0\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}1-(-2)\\-1-0\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-1}{3}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés

2. **a.** $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times -2 = 1 + 9 - 10 = 0$
$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 3 \times -1 + 5 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan (ABC), c'est donc un vecteur normal du plan (ABC).

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme :

$x + 3y + 5z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

De plus, le point A appartient au plan (ABC) donc ses coordonnées verifient l'équation du plan. On a donc :

$-2 + 3 \times 0 + 5 \times 2 + d = 0 \iff -2 + 10 + d = 0 \iff d = -8$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

c. $x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0 + 3 \times 0 + 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7 \neq 0$

Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC) d'où les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Une équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ est : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

D'une part : pour $t = 0$, on a $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \times 0 = 0 \\ z = 3 + 5 \times 0 = 3 \end{cases}$.

On reconnait les coordonnées du point D, donc D appartient à la droite $\mathscr{D}_1$.

D'autre part : un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ c'est à dire le vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est orthogonal au plan(ABC).

Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonal au plan (ABC).

Donc la droite $\mathscr{D}_1$ est bien la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

b. Pour déterminer les points éventuels d'intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ résolvons le système (S) : $\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 \times (1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5 \times (1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 3 + 5 + 15s = 2 - 6s \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 + 3s = 1 + 3 \times \dfrac{-2}{7} = \dfrac{1}{7} \\ s = -\dfrac{4}{14} = -\dfrac{2}{7} \\ s = -\dfrac{6}{21} = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.

Remplaçons t par $\dfrac{1}{7}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}_1$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ y = 3 \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7} \\ z = 3 + 5 \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{26}{7} \end{cases}$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc sécantes et les coordonnées de leur point d'intersection sont $\left(\dfrac{1}{7}\,;\,\dfrac{3}{7}\,;\,\dfrac{26}{7}\right)$.

4. **a.** Soit H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

H est donc l'intersection du plan (ABC) et de la hauteur issue de D dans le tétraèdre ABCD c'est à dire la droite $\mathcal{D}_1$.

Les coordonnées de H vérifient donc l'équation cartésienne du plan (ABC) et l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.

$t + 3 \times (3t) + 5 \times (3 + 5t) - 8 = 0 \iff t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \iff 35t = -7 \iff t = -\dfrac{7}{35} = -\dfrac{1}{5}$

Remplaçons t par $-\dfrac{1}{5}$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = 3 \times \dfrac{-1}{5} = -\dfrac{3}{5} \\ z = 3 + 5 \times \dfrac{-1}{5} = \dfrac{10}{5} = 2 \end{cases}$$

Le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) est le point H de coordonnées $\mathrm{H}\left(-\dfrac{1}{5}\,;\,-\dfrac{3}{5}\,;\,2\right)$.

b. La distance du point D au plan (ABC) est égale à la longueur DH car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

$\mathrm{DH}^2 = \left(-\dfrac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{5} - 0\right)^2 + (2-3)^2 = \dfrac{1}{25} + \dfrac{9}{25} + 1 = \dfrac{35}{25}$

DH$= \sqrt{\dfrac{35}{25}} = \sqrt{\dfrac{7}{5}} = \sqrt{\dfrac{14}{10}} = \sqrt{1,4}$ ou $\dfrac{\sqrt{35}}{5} \approx 1,183$ soit 1,18 au centième près.