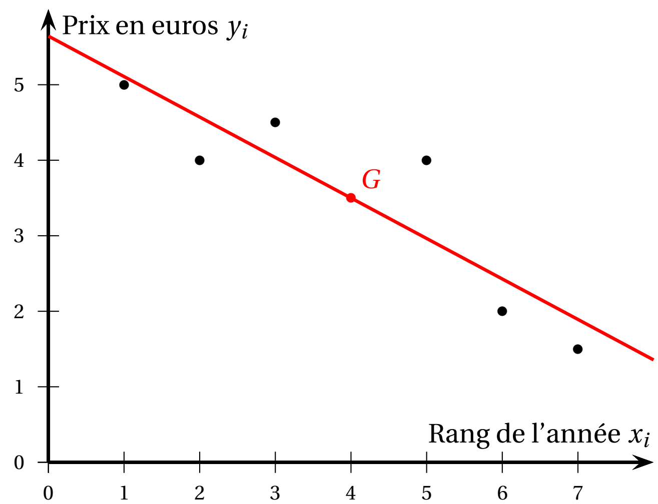
Corrigé du concours de contrôleur des douanes
Branche surveillance session 2014

Exercice 1

Année	2005	2006	2007	2009	2010	2011
Rang de l'année x_i	1	2	3	5	6	7
Prix de l'abonnement en euros y_i	5	4	4,50	4	2	1,5



1. Voir ci-dessus.
2. On a $G(4\,;\,3,50)$
3. **a.** On a donc $G(4\,;\,3,50) \in D \iff 3,5 = -0,536 \times 4 + b \iff 3,5 + 2,144 = b \iff b = 5,644$

   b. D a pour l'une de ses équations $y = 5,644 - 0,536x$. Tracé ci-dessus.
4. 2012 correspond au rang 8, donc le prix en 2012 devrait être à peu près $5,644 - 0,536 \times 8 = 5,644 - 4,288 = 1,356 \approx 1,36$ *e*.
5. L'erreur est donc de $14,75 - 1,36 = 13,39$ pour un prix estimé en 2012 de 1,36, soit une erreur en pourcentage de $\dfrac{13,39}{1,36} \approx 9,85$, soit environ 985 % !

Exercice 2

Un appareil acheté neuf coûte 2 500 euros. Au bout d'un an, son prix de revente a diminué de 20 % et on suppose qu'il en est ainsi chaque année.

1. Enlever 20 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$.

   Donc $u_1 = u_0 \times 0,8 = 2\,500 \times 0,8 = 2\,000$ (€).
2. On a vu que d'une année sur l'autre on a $u_n = u_{n-1} \times 0,8$: donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = 2\,500$.

   On sait qu'alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2\,500 \times 0,8^n$.

3. Si $v_n = \ln(u_n)$, alors $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(2500 \times 0,8^{n+1}\right) = \ln(2500) + \ln 0,8^{n+1} = \ln(2500) + \ln 0,8^n \times 0,8 = \ln(2500) + \ln 0,8^n + \ln 0,8 = \ln 2500 \times 0,8^n + \ln 0,8 = v_n + \ln 0,8$.
   L'égalité $v_{n+1} = v_n + \ln 0,8$ montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 0,8$.

4.
   - Avec u_n : il faut résoudre $2500 \times 0,8^n < 500 \iff 0,8^n < \dfrac{1}{5} \iff n \ln 0,8 > \ln \frac{1}{5}$ par croissance de la fonction logarithme népérien $\iff n \ln 0,8 > -\ln 5 \iff n < -\dfrac{\ln 5}{\ln 0,8}$
   Or $\dfrac{\ln 5}{\ln 0,8} \approx 7,2$: il faut attendre la 8e année.
   - Avec v_n : on a $u_n < 500 \iff \ln u_n < \ln 500 \iff v_n < \ln 500$.
   Or $v_n = v_0 + n \ln 0,8 = \ln 2500 + n \ln 0,8$. Il faut donc résoudre :
   $\ln 2500 + n \ln 0,8 < \ln 500 \iff n \ln 0,8 < \ln 500 - \ln 2500 \iff n \ln 0,8 < \ln \dfrac{500}{2500} \iff n \ln 0,8 < \ln \frac{1}{5} \iff n > \dfrac{\ln \frac{1}{5}}{\ln 0,8}$ (car $\ln \frac{1}{5} < 0$). On retrouve les mêmes inéquations, donc la même solution.

Exercice 3

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-3} - \frac{1}{x+4}$$

Partie A

1. Sur $[0~;~+\infty[$, $f'(x) = \mathrm{e}^{x-3} - \left(-\dfrac{1}{(x+4)^2}\right) = \mathrm{e}^{x-3} + \dfrac{1}{(x+4)^2}$.
2. Quel que soit $x \in [0~;~+\infty[$, on a $\mathrm{e}^{x-3} > 0$ et $\dfrac{1}{(x+4)^2} > 0$.
   Donc sur $[0~;~+\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante (strictement).
3. - On a $f(0) = \mathrm{e}^{-3} - \dfrac{1}{4}$;
   - On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+4} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x-3} = +\infty$.
   Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. **a.** f est donc croissante de $f(0) < 0$ à $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
f	$\mathrm{e}^{-3} - \frac{1}{4}$ $\nearrow$		$+\infty$

   La fonction f continue car dérivable sur $[0~;~+\infty[$ est croissante de $f(0) < 0$ à plus l'infini s'annule pour un réel unique $\alpha > 0$.
   On en déduit que $f(x) < 0$ sur $[0~;~\alpha[$, $f(x) > 0$ sur $]\alpha~;~+\infty[$.

5. **a.** Reproduisez et complétez le tableau suivant :

x	1,32	1,325	1,33
$f(x)$	$-0{,}0016$	-0005	$0{,}0006$

b. D'après le tableau précédent : $1,32 < \alpha < 1,33$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x-3} - \ln(x+4).$$

La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. On note g' sa fonction dérivée.

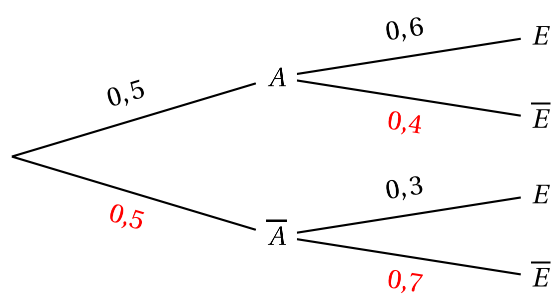
1. Sur l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$ la fonction $\ln(x+4)$ est dérivable, donc a fortiori sur $[0\ ;\ +\infty[$: $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x-3} - \dfrac{1}{x+4} = \mathrm{e}^{x-3} - \dfrac{1}{x+4} = f(x)$.
2. D'après les résultats de la partie A on a donc :
   - $g'(x) < 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$ et sur cet intervalle la fonction f est décroissante,
   - $g'(x) > 0$ sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle la fonction f est croissante.

Exercice 4

Un jeune garçon possède deux manettes de jeu d'aspects parfaitement identiques, mais l'une d'entre elles est truquée.
Le jeune garçon ne peut pas savoir laquelle des deux est truquée.

1. Le jeune garçon choisit au hasard l'une des deux manettes et il joue une partie avec celle-ci.
   On note :

   A l'évènement « le garçon choisit la manette truquée » et $\overline{A}$ l'évènement contraire ;
   E l'évènement « le garçon gagne la partie » et $\overline{E}$ l'évènement contraire.



   a. Voir ci-dessus.

   b. La probabilité cherchée est $p(A \cap E) = p(A) \times p_A(E) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$.

   c. La probabilité cherchée est $p\left(\overline{A} \cap E\right) = p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(E) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$.

   d. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(E) = p(A \cap E) + p\left(\overline{A} \cap E\right) = 0,3 + 0,15 = 0,45$.

   e. On a : $p_E\left(\overline{A}\right) = \dfrac{p\left(E \cap \overline{A}\right)}{p(E)} = \dfrac{p\left(\overline{A} \cap E\right)}{p(E)} = \dfrac{0,15}{0,45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$.
2. On a une épreuve de Bernoulli : la variable X égale au nombre de gains suit une loi binomiale $\mathscr{B}(3\ ;\ 0,3)$.
   On a : $p(X = 2) = \binom{3}{2} \times 0,3^2 \times (1 - 0,3) = 3 \times 0,09 \times 0,7 = 0,189$.