∽ Contrôleur des douanes : Branche surveillance 2016 ∾

OPTION A : MATHÉMATIQUES

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice n° 1

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1~;~2~;~3~;~4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 , dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Si a est le premier terme de la suite et r la raison, on a :
   $p_1 = a,\ p_2 = a + r,\ p_3 = a + 2r,\ p_4 = a + 3r = 0,4$.
   Mais $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \iff a + a + r + a + 2r + 0,4 = 1 \iff 3a + 3r = 0,6 \iff a + r = 0,2$.
   Les nombres a et r vérifient donc le système :
   $\left\{\begin{array}{l c l} a+3r & = & 0,4\\ a+r & = & 0,2\end{array}\right.$ d'où par différence $2r = 0,2 \iff r = 0,1$, puis $a = 0,1$.
   On a donc $p_1 = 0,1,\ p_2 = 0,2,\ p_3 = 0,3,\ p_4 = 0,4$.
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont indépendants.
   a. La probabilité est égale à $0,1 \times 0,2 \times 0,4 = 0,008$.
   b. Les bons tirages sont : 123, 124, 234.
   La probabilité est donc égale à :
   $0,1 \times 0,2 \times 0,3 + 0,1 \times 0,2 \times 0,4 + 0,2 \times 0,3 \times 0,4 = 0,006 + 0,008 + 0,024 = 0,038$.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   a. À chaque lancer la probabilité de tomber sur le 4 est égale à 0,4 et donc celle de ne pas avoir le 4 est de 0,6.
   Si on a le 4 pour la première fois au n-ième lancer c'est que l'on a eu uniquement 1, 2 ou 3 avec une probabilité de $0,6^{n-1}$.
   On a donc $U_n = 0,4 \times 0,6^{n-1}$, donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme 0,4.
   b. On a $S_n = 0,4 + 0,4 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6^2 + \ldots + 04 \times 0,6^{n-1}$ ou
   $S_n = 0,4\left(1 + 0,6 + 0,6^2 + \ldots + 0,6^{n-1}\right)$ et en multipliant par 0,6 chaque membre :
   $0,6S_n = 0,4\left(0,6 + 0,6^2 + \ldots + 0,6^{n-1} + 0,6^n\right)$: par différence des deux lignes précédentes on obtient :
   $0,4S_n = 0,4\left(1 - 0,6^n\right) \iff S_n = 1 - 0,6^n$.
   Comme $0 < 0,6 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$, donc
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

Exercice n° 2

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

- $u_1 - u_0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$: ceci montre que la suite n'est pas arithmétique;
- $\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$: ceci montre que la suite n'est pas géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

a. $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

b. Pour tout entier n, $\quad v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$.

c. La relation précédente montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $v_0 = 1$.

On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times q^n$ q étant la raison de la suite, donc $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

a. $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$.

b. $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_n}$

c. $w_{n+1} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + w_n$.

d. La relation vraie pour tout naturel $w_{n+1} = w_n + 2$ montre que la suite (w_n) est arithmétique de raison 2, de premier terme $w_0 = -1$.

On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_n = -2 + 2n$

4. Or $w_n = \frac{u_n}{v_n} \Longrightarrow u_n = v_n \times w_n = \frac{1}{2^n} \times (-1 + 2n) = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \dfrac{2\times 0+3}{2^0} = 2-3 = -1$.
La relation est vraie au rang zéro.
Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$, alors
$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n} + \dfrac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n} + \dfrac{2n+1}{2^{n+1}} =$
$2 + \dfrac{-4n-6+2n+1}{2^{n+1}} = 2 - \dfrac{-2n-5}{2^{n+1}} = 2 - \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$: la relation est vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence on a pour tout naturel n, $\quad S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

Exercice n° 3

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Somme de fonctions dérivables sur $[1~;~+\infty[$ la fonction φ est dérivable et sur cet intervalle :
   $\varphi'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x - 4x\ln x - 2x = -4x\ln x$.
   Or $x \geqslant 1 \Longrightarrow \ln x \geqslant \ln 1 = 0$, donc $\varphi'(x) \leqslant 0$ comme opposé d'un produit de facteurs positifs. La fonction φ est donc décroissante sur $[1~;~+\infty[$

   b. $\varphi(\text{e}) = 1 + \text{e}^2 - 2\,\text{e}^2 \ln \text{e} = 1 + \text{e}^2 - 2\,\text{e}^2 = 1 - \text{e}^2$.
   On a $\varphi(1) = 1 + 1 - \ln 1 = 2$ et $\varphi(\text{e}) = 1 - \text{e}^2 < 0$.
   La fonction φ est continue car dérivable sur l'intervalle $[1~;~\text{e}]$ et décroissante; d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha \in]1~;~\text{e}[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

   c. La fonction étant décroissante, on a donc $\varphi(x) \geqslant 0$ sur $[1~;~\alpha]$ et $\varphi(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha~;~+\infty[$.

2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

   $$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

   a. f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[1~;~+\infty[$, le dénominateur étant non nul car supérieur ou égal à 1 :
   $f'(x) : \dfrac{\frac{1}{x}\times\left(1+x^2\right) - 2x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{x} + x - 2x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2\ln x}{x\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.

   b. Comme $x\left(1+x^2\right)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $\varphi(x)$ vu à la question 1.
   On a donc :
   - $f'(x) \geqslant 0$ sur $[1~;~\alpha]$ et
   - $f'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha~;~+\infty[$.

   f est donc croissante sur $[1~;~\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha~;~+\infty[$.

c. On a $0 < x^2 < 1 + x^2 \Longrightarrow 0 < \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow 0 \leqslant \dfrac{\ln x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$ (car sur $[1~;~+\infty[$, $\ln x \geqslant 0$), soit $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$.

d. On sait par puissance comparée que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice n° 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère les points A$(3\,;\,0\,;\,6)$ et I$(0\,;\,0\,;\,6)$ et on appelle (D) la droite passant par A et I.
On appelle (P) le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

1. (P) a pour vecteur normal le vecteur $\vec{p}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et (Q) a pour vecteur normal le vecteur $\vec{q}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

   Or $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0 + 2 - 2 = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

2. Équation de la droite (IA) :
   $M(x~;~y~;~z) \in (\text{IA}) \iff \overrightarrow{\text{I}M} = \alpha\overrightarrow{\text{IA}}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Avec $\overrightarrow{\text{I}M}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{IA}}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, on a

   $$M(x~;~y~;~z) \in (\text{IA}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3\alpha\\ y &=& 0\alpha\\ z-6 &=& 0\alpha\end{array}\right. \alpha \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3\alpha\\ y &=& 0\\ z &=& 6\alpha\end{array}\right. \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Or ces coordonnées de (D) vérifient l'équation de (P) : $2\times 0 + 6 - 6 = 0$ et aussi l'équation de (Q) : $0 - 2\times 6 + 12 = 0$: tous les points de (D) appartiennent à (P) et à (Q) donc à leur intersection.

3. Les points de l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$ sont définis par le système : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right.$ donc le point commun à $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$ et à (P) vérifient le système :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ z &=& 0\\ 2y+z-6 &=& 0\end{array}\right. \Longrightarrow 2y - 6 = 0 \iff y = 3. \text{ Donc B}(0\,;\,3\,;\,0).$$

   De même pour le point C dont les coordonnées vérifient le système :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ z &=& 0\\ y-2z+12 &=& 0\end{array}\right. \Longrightarrow y = -12. \text{ C}(0~;~-12~;~0).$$

4. On a $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}-3\\-12\\-6\end{pmatrix}$.

   On sait que $M(x~;~y~;~z) \in (T) \iff -3x - 12y - 6z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$

Ainsi $\text{B}(0\,;3\,;0) \in (T) \iff -3\times 0 - 12\times 3 - 6\times 0 = d \iff -36 = d$.
On a donc $M(x\,;\ y\,;\ z) \in (T) \iff -3x - 12y - 6z = -36 \iff x + 4y + 2z = 12$.