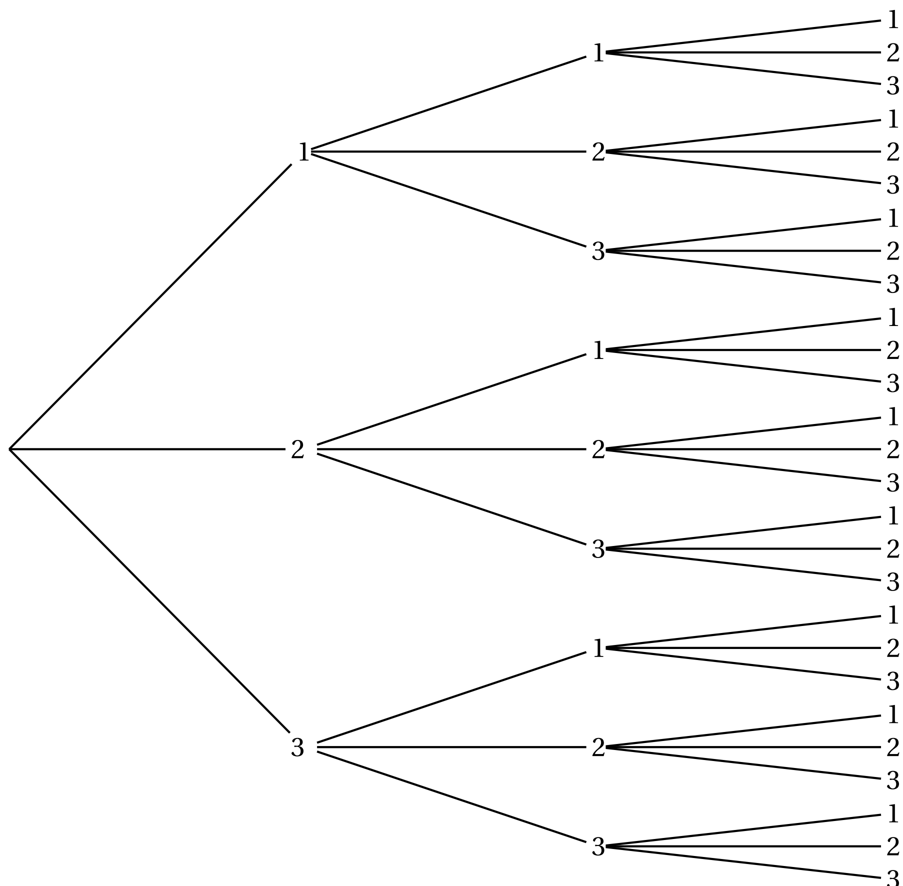
Corrigé du concours de contrôleur des douanes : surveillance avril 2017

OPTION A : MATHÉMATIQUES

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice n° 1

1. En s'aidant d'un arbre comme ci-dessous, donner la liste des 27 tirages possibles.



2. **a.** $X \in \{-10,\ 3,\ 5,\ 15\}$

b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

X	-10	3	5	15
$p(X = x_i)$	$\frac{12}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$

c. On a $E(X) = -10 \times \frac{12}{27} + 3 \times \frac{3}{27} + 5 \times \frac{6}{27} + 15 \times \frac{6}{27} = \frac{-120 + 9 + 30 + 90}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ €.

Le jeu est plus qu'équitable puisqu'à chaque partie l'organisateur perd en moyenne plus de 33 centimes.

Exercice n^o 2

1. **a.** Enlever 2 %, soit $\dfrac{2}{100}$ c'est multiplier par $1-\dfrac{2}{100}=1-0,02=0,98$.
   Donc $u_1=u_0\times 0,98=200\,000\times 0,98=196\,000$;
   $u_2=u_1\times 0,98=196\,000\times 0,98=192\,080$.
   b. On a pour tout naturel n, $\quad u_{n+1}=u_n\times 0,98$.
   c. Le résultat précédent signifie que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,98 et de premier terme $u_0=200\,000$.
   On sait que quel que soit n, $\quad u_n=200\,000\times 0,8^n$.
   d. Exemple $u_{10}=200\,000\times 0,8^{10}\approx 163\,415$.
2. **a.** On a donc $v_2=120\,000\times 1,01^2=122\,412$
   b. $v_{10}=120\,000\times 1,01^{10}\approx 135\,219,1$ soit 135 219 à l'unité près.
3. Il faut trouver $n\in\mathbb{N}$ tel que $v_n>u_n \iff 120\,000\times 1,01^n>200\,000\times 0,98^n \iff$ $\dfrac{200\,000}{120\,000}>\dfrac{0,98^n}{1,1^n} \iff \dfrac{5}{3}>\dfrac{0,98}{1,1}^n \iff \ln\dfrac{5}{3}>n\ln\dfrac{0,98}{1,1}$ par croissance de la fonction logarithme népérien $\iff \dfrac{\ln\frac{5}{3}}{\ln\frac{98}{110}}<n$ (car $\ln\dfrac{98}{110}<0$).

   Or $\dfrac{\ln\frac{5}{3}}{\ln\frac{98}{110}}\approx 14,4$.
   Il faut donc attendre la quinzième année

Exercice n^o 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^{x}+x+2$$

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$, on a pat somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
   b. Soit la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par : $d(x)=f(x)-(x+2)=\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^{x}$.
   D'après la question précédente $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}d(x)=0$: géométriquement ceci signifie que la droite D d'équation $y=x+2$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. On a $d(x)=\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-3\right)$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0_+$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}-3=-3$, on a par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}d(x)=0_-$: ceci signifie qu'au voisinage de moins l'infini, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite D.
2. En factorisant $\mathrm{e}^{x}>0$ quel que soit $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)=\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-3+\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}\right)$.
   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}=0$ (cours) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^{x}}=0$, donc par somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}-3+\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}+\frac{2}{\mathrm{e}^{x}}=+\infty$ et enfin par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
3. **a.** f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $f'(x)=2\,\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^{x}+1$.

b. On pose $X = \mathrm{e}^x$, donc $f'(x) = f'(X) = 2X^2 - 3X + 1$: ce trinôme a une racine évidente 1 et le produit des racines étant égal à $\dfrac{1}{2}$, l'autre racine est $\dfrac{1}{2}$.

On sait qu'alors $f'(X) = 2(X-1)\left(X - \dfrac{1}{2}\right) = (X-1)(2X-1) = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(2\,\mathrm{e}^x - 1\right)$.

c. $f'(x) = 0 \iff \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(2\,\mathrm{e}^x - 1\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l c l} \mathrm{e}^x - 1 & = & 0\\ 2\,\mathrm{e}^x - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} \mathrm{e}^x & = & 1\\ \mathrm{e}^x - 1 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \ln 1\\ x & = & \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.$

On a donc $f'(0) = f'(-\ln 2) = 0 \quad (-\ln 2 \approx -0,69)$.

On sait que le trinôme est positif, donc que la dérivée est positive, donc la fonction croissante sauf sur l'intervalle $]-\ln 2\,;\,0[$ où elle est décroissante.

d. On a $f(-\ln 2) = \mathrm{e}^{-2\ln 2} - 3\,\mathrm{e}^{-\ln 2} + -\ln 2 + 2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 2}} - \dfrac{3}{-}\,\mathrm{e}^{\ln 2} - \ln 2 + 2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 4}} - \dfrac{3}{\mathrm{e}^{\ln 2}} - \ln 2 + 2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{2} - \ln 2 + 2 = \dfrac{3}{4} - \ln 2$.

De même $f(0) = 1 - 3 + 0 + 2 = 0$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0		
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{4} - \ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** On sait que $M(x\,;\,y) \in (T) \iff y - f\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = f'\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\left(x - \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.

$f\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \mathrm{e}^{2\ln\left(\frac{3}{2}\right)} - 3\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \mathrm{e}^{\ln\frac{9}{4}} - 3\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}$ et

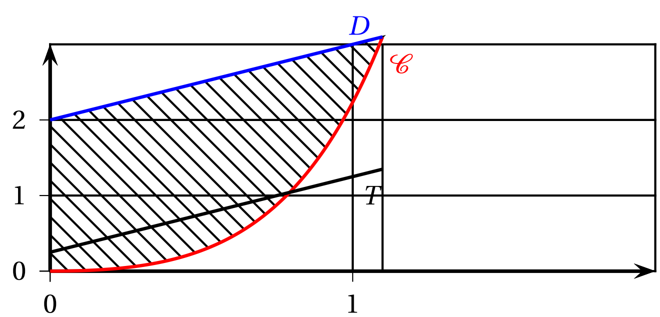
$f'\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 2\,\mathrm{e}^{2\ln\frac{3}{2}} - 3\,\mathrm{e}^{\ln\frac{3}{2}} + 1 = \dfrac{18}{4} - \dfrac{9}{2} + 1 = 1$, donc :

$M(x\,;\,y) \in (T) \iff y - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} = \left(x - \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right) = \iff y = x + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} - \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \iff$

$y = x + \dfrac{1}{4}$.

Les droites T et D ayant le même coefficient directeur dans leurs équations sont parallèles et distinctes car $2 \neq \dfrac{1}{4}$.

b.



c. D'après le tableau de variations, la fonction f est positive sur $[0\,;\,+\infty[$, donc sur l'intervalle $[0\,;\,\ln 3]$.

De même la fonction $x \longmapsto x+2$ est strictement positive sur ce même intervalle $[0~;~\ln 3]$, de 2 à $2+\ln 3$.

La fonction différence d définie par $d(x) = \text{e}^{2x} - 3\,\text{e}^{x} = \text{e}^{x}\left(\text{e}^{x} - 3\right)$ est négative sur l'intervalle $[0~;~\ln 3]$: en effet

$0 \leqslant x \leqslant \ln 3 \Longrightarrow \text{e}^{0} \leqslant \text{e}^{x} \leqslant \text{e}^{\ln 3}$ par croissance de la fonction exponentielle, soit $1 \leqslant \text{e}^{x} \leqslant 3 \Longrightarrow \text{e}^{x} - 3 \leqslant 0$ et comme $\text{e}^{x} > 0$ par produit $\text{e}^{x}\left(\text{e}^{x} - 3\right) \leqslant 0$.

L'aire cherchée est donc l'intégrale de la fonction $-d(x) = 3\,\text{e}^{x} - \text{e}^{2x}$, fonction qui a pour primitive la fonction $x \longmapsto 3\,\text{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\text{e}^{2x}$.

L'aire cherchée est donc égale à :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\ln 3} [(x+2) - f(x)]\,\text{d}x = \int_0^{\ln 3} 3\,\text{e}^{x} - \text{e}^{2x}\,\text{d}x = \left[3\,\text{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\text{e}^{2x}\right]_0^{\ln 3} = 3\,\text{e}^{\ln 3} - \dfrac{1}{2}\text{e}^{2\ln 3} - \left[3\,\text{e}^{0} - \dfrac{1}{2}\text{e}^{2\times 0}\right] = 9 - \dfrac{9}{2} - 3 + \dfrac{1}{2} = 2.$