Corrigé du baccalauréat Métropole–Guadeloupe Technique de la musique et de la danse septembre 2015

EXERCICE 1 **8 points**

1. À partir d'un FA, on monte de 70 demi-tons.

   a. Une quinte juste contient 7 demi-tons, donc pour monter de 70 demi-tons, on monte de $\dfrac{70}{7} = 10$ quintes justes.

   b. Une quarte juste contient 5 demi-tons, donc pour monter de 70 demi-tons, on monte de $\dfrac{70}{5} = 14$ quartes justes.

   c. Si on monte de 12 demi-tons, on retrouve la même note une octave au dessus.
   $70 = 12 \times 5 + 10$ donc augmenter de 70 demi-tons revient à monter de 5 octaves et 10 demi-tons :

   … MI FA FA# SOL SOL# LA LA# SI DO DO# RÉ RÉ# MI

   $+10$

   La note obtenue est donc RÉ#. Plus précisément, si on part de LA_n, on arrive à $\text{RÉ\#}_{n+5}$.

2. À partir du LA_3, on monte jusqu'à une note de fréquence 1 046 hertz.

   La différence de hauteur entre le LA_3 de fréquence 440 Hz est égale à $10^3 \log\left(\dfrac{1\,046}{440}\right) \approx$ 376 savarts.

3. À partir du LA_3, on monte de 20 demi-tons.

   La suite des fréquences est géométrique de raison q telle que $q^{12} = 2$. Donc $q = 2^{\frac{1}{12}}$.

   Si on monte de 20 demi-tons, la fréquence passe de 440 à $440 \times q^{20} = 440 \times 2^{\frac{20}{12}} \approx 1\,397$ Hz.

4. À partir du LA_3 , on descend de 750 savarts.

   On cherche donc une fréquence f telle que la différence de hauteur entre le LA_3 et la note ayant cette fréquence est de 750 savarts, c'est-à-dire qu'on cherche f telle que :

   $10^3 \log\left(\dfrac{440}{f}\right) = 750 \iff \log\left(\dfrac{440}{f}\right) = 0,75 \iff \dfrac{440}{f} = 10^{0,75} \iff \dfrac{440}{10^{0,75}} = f \iff f \approx$ 78 Hz

5. **a.** On complète le tableau de congruence modulo 12 suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$7n$ est congru à	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5

   b. On passe d'un RÉ à un SI en augmentant de n quintes justes; on augmente donc de $7n$ demi-tons pour passe du RÉ au SI.

   Mais pour passer d'un RÉ au SI suivant, il y a 9 demi-tons, puis $9 + 12 = 21$ demi-tons pour passer au SI suivant, puis $9 + 2 \times 12 = 33$ demi-tons pour passer encore au SI suivant, etc.

   Il faut donc que $7n \equiv 9$ modulo 12 pour passer d'un RÉ à un SI en n quintes justes.

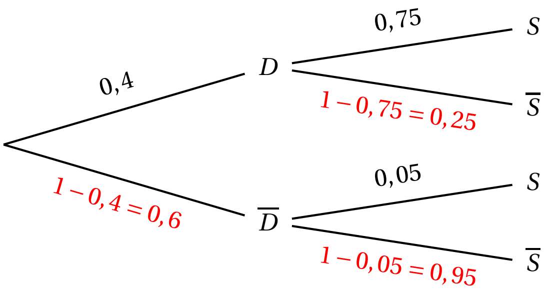
   Une valeur possible donnée par le tableau est $n = 3$. On passe donc du RÉ au SI en augmentant de 3 quintes justes, soit 21 demi-tons, c'est-à-dire une octave plus 9 demi-tons.

EXERCICE 2 — 6 points

1. **a.** On sait que 40 % des élèves sont capables de déchiffrer une partition donc $P(D) = 0,40$.

   b. On sait que 5 % des élèves de cette chorale qui ne sont pas capables de déchiffrer une partition sont des solistes donc $P_{\overline{D}}(S) = 0,05$.

2. On représente la situation décrite ci-dessus à l'aide d'un arbre pondéré :



3. L'événement « l'élève choisi est soliste et est capable de déchiffrer une partition » est $D \cap S$:
   $P(D \cap S) = P(D) \times P_D(S) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

4. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(S) = P(D \cap S) + P\left(\overline{D} \cap S\right) = 0,3 + 0,6 \times 0,05 = 0,3 + 0,03 = 0,33$

5. On cherche la probabilité que l'élève choisi soit capable de déchiffrer une partition sachant qu'il est soliste, c'est-à-dire $p_S(D)$: $p_S(D) = \dfrac{P(D \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,3}{0,33} \approx 0,91$

EXERCICE 3 — Enseignement obligatoire (au choix) — 6 points

1. Le nombre $\ln(75)$ est égal à :

   a. $\boxed{\ln(3) + 2\ln(5)}$ **b.** $\ln(3) \times 2\ln(5)$ **c.** $\ln(3) + [\ln(5)]^2$

   $75 = 3 \times 5^2$ donc $\ln(75) = \ln\left(3 \times 5^2\right) = \ln(3) + \ln\left(5^2\right) = \ln(3) + 2\ln(5)$

2. On considère la fonction f définie sur $[0,5\,;\,3]$ par : $f(x) = 2x + 3\ln(x)$. La courbe représentative de f dans un repère du plan est notée $\mathscr{C}$.

   a. $\boxed{\text{Le point M de coordonnées (1 ; 2) appartient à } \mathscr{C}.}$

   b. Le point N de coordonnées (1 ; 5) appartient à $\mathscr{C}$.

   c. Le point P de coordonnées (2 ; 1) appartient à $\mathscr{C}$.

   $f(1) = 2 \times 1 + 3\ln(1) = 2 + 3 \times 0 = 2$ donc $\mathrm{M} \in \mathscr{C}$

3. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x)$. La courbe représentative de f dans un repère du plan est notée $\mathscr{C}$.

   a. $\boxed{\text{La tangente à la courbe } \mathscr{C} \text{ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.}}$

   b. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des ordonnées.

   c. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 n'est parallèle ni à l'axe des abscisses ni à l'axe des ordonnées.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1+x}{x^2}$ donc $f'(1) = 0$ donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 0 ce qui signifie qu'elle est parallèle à l'axe des abscisses.

4. On considère la fonction f définie sur [-7; 0] par : $f(x) = 3 - 2\text{e}$.

a. Sur $[-7 ; 0]$, la fonction f est positive et croissante.

b. $\boxed{\text{Sur } [-7 ; 0]\text{, la fonction } f \text{ est positive et décroissante.}}$

c. Sur $[-7 ; 0]$, la fonction f est négative et décroissante.

$f'(x) = -2\,\text{e}^x < 0$ donc la fonction f est décroissante.
Sur $[-7 ; 0]$, $x \leqslant 0$ donc $\text{e}^x \leqslant 1$ donc $-2\,\text{e}^x \geqslant -2$ et donc $3 - 2\,\text{e}^x \geqslant 1 > 0$

5. On considère la fonction f définie sur $[0; 10]$ par : $f(x) = (2x+1)\text{e}^x$. La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $[0; 10]$ par :

a. $f'(x) = (2x+1)\text{e}^x$ **b.** $f'(x) = 2\text{e}^x$ **c.** $\boxed{f'(x) = (2x+3)\text{e}^x}$

$f'(x) = (2) \times \text{e}^x + (2x+1) \times \text{e}^x = (2+2x+1)\,\text{e}^x = (2x+3)\,\text{e}^x$

6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $2\text{e}^x + 3 \geqslant 1$ est :

a. $]0 ; +\infty[$ **b.** $[0 ; +\infty[$ **c.** $\boxed{]-\infty ; +\infty[}$

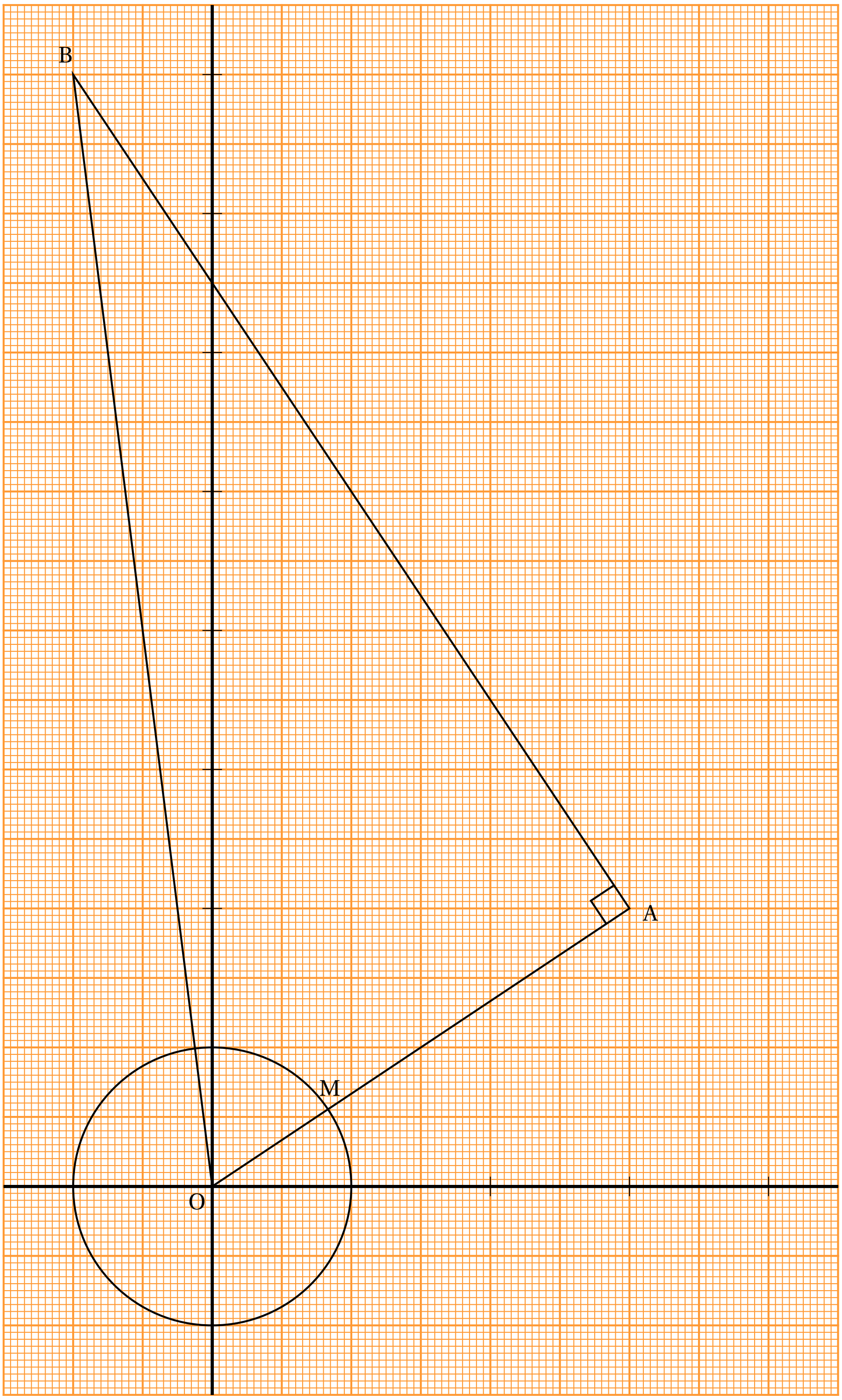
$2\text{e}^x + 3 \geqslant 1 \iff 2\,\text{e}^x \geqslant -2 \iff \text{e}^x \geqslant -1$ inégalité qui est toujours vraie car, pour tout x, $\text{e}^x > 0$.

EXERCICE 4 — Enseignement renforcé (au choix) — 6 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A d'affixe $Z_\text{A} = 3+2\text{i}$ et B d'affixe $Z_\text{B} = -1+8\text{i}$.

1. Voir figure page suivante. .
2. **a.** $|Z_\text{A}|^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ donc $|Z_\text{A}| = \sqrt{13}$; $|Z_\text{B}|^2 = (-1)^2 + 8^2 = 65$ donc $|Z_\text{B}| = \sqrt{65}$
   $|Z_\text{B} - Z_\text{A}|^2 = |-1+8\,\text{i} - 3 - 2\,\text{i}|^2 = |-4+6\,\text{i}|^2 = (-4)^2 + 6^2 = 52$ donc $|Z_\text{B} - Z_\text{A}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

   b. Le module du nombre $Z_\text{B} - Z_\text{A}$ représente par définition la distance AB.
3. $\text{OA}^2 = |Z_\text{A} - Z_\text{O}|^2 = |Z_\text{A}|^2 = 13$; $\text{OB}^2 = |Z_\text{B} - Z_\text{O}|^2 = |Z_\text{B}|^2 = 65$; $\text{AB}^2 = |Z_\text{B} - Z_\text{A}|^2 = 52$
   $65 = 52 + 13$ donc $\text{OB}^2 = \text{AB}^2 + \text{OA}^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en A.
4. L'aire du triangle OAB rectangle en A, est, en unités d'aire, égale à $\dfrac{\text{OA} \times \text{AB}}{2} = \dfrac{\sqrt{13} \times 2\sqrt{13}}{2} = 13$.
   Chaque unité sur les axes est de 2 cm, donc une unité d'aire est égale à 4 cm^2.
   L'aire du triangle OAB est donc $4 \times 13 = 52$ cm^2.
5. Soit M le point d'intersection du cercle trigonométrique et du segment [OA].
   D'après le définition du point M, on peut dire que $\overrightarrow{\text{OA}} = \text{OA}.\overrightarrow{\text{OM}}$ autrement dit $Z_{\overrightarrow{\text{OA}}} = \sqrt{13}.Z_{\overrightarrow{\text{OM}}}$ et donc $Z_\text{A} = \sqrt{13}.Z_\text{M}$.
   Donc $Z_\text{M} = \dfrac{Z_\text{A}}{\sqrt{13}} = \dfrac{3+2\,\text{i}}{\sqrt{13}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}} + \dfrac{2}{\sqrt{13}}\,\text{i}$.


B
A
M
O