∽ Baccalauréat Groupements I-II-III-IV 16 juin 2017 ∾
Technique de la musique et de la danse

Le candidat traitera trois exercices :

- Obligatoirement l'exercice 1
- Obligatoirement l'exercice 2
- Au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4

EXERCICE 1 **7 points**

Rappels :

- Dans la gamme de tempérament égal, l'octave est divisée en 12 demi-tons égaux séparant les notes : DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI.
  Quand on monte d'un demi-ton, la fréquence de la note, exprimées en hertz (Hz), est multipliée par $q = 2^{\frac{1}{12}}$.
- À chaque octave est associée un entier naturel n appelé indice et les notes d'une octave portent l'indice de cette octave. Ainsi le LA$_3$ (le LA du diapason) correspond à la note LA de l'octave d'indice 3, le LA$_4$ correspond à la note LA de l'octave d'indice 4 située au-dessus de l'octave d'indice 3.
  La fréquence de LA$_3$ est 440 Hz.
- Si un son possède une intensité sonore I (exprimée en W.m^{-2}), son niveau sonore est exprimé en décibels (dB) par :
  $$N(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ où } I_0 = 10^{-12}\text{W.m}^{-2} \text{ et log désigne la fonction logarithme décimal.}$$
- On rappelle que les intensités sonores s'ajoutent.
- Pour deux notes de fréquence respectives f_1 et f_2, avec $f_2 \geqslant f_1$, la différence de hauteur de ces notes, exprimée en savarts, est égale à $1\,000\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$.
- On estime que l'oreille humaine normale perçoit des sons dont la fréquence est comprise entre 20 Hz et 20 000 Hz. Le seuil de douleur est atteint pour des sons de niveau sonore supérieur ou égal à 120 dB.

Après un traumatisme, la plage des fréquences des sons audibles par Nathan s'est restreinte : elle s'étend de 100 Hz à 11 000 Hz. En outre, Nathan ne supporte plus un niveau sonore supérieur à 90 dB.

1. Calculons la différence de hauteur, exprimée en savarts, entre un son de fréquence 100 Hz et un son de fréquence 11 000 Hz.
   La différence de hauteur, exprimée en savarts, entre un son de fréquence 100 Hz et un son de fréquence 11 000 Hz est égale à :
   $1\,000\log\left(\frac{11\,000}{100}\right) = 1\,000\log(110) \approx 2\,041$.
2. **a.** $55 = 4 \times 12 + 7$. Le quotient est 4 et le reste 7 dans la division euclidienne de 55 par 12.
   b. Si on monte de 55 demi-tons à partir de LA$_3$, la note obtenue est MI$_8$. Si nous ajoutons quatre octaves, nous obtenons LA$_7$. En ajoutant encore sept demi-tons nous obtenons MI$_8$.
3. Montrons que la note la plus basse que Nathan puisse entendre est le SOL#$_1$.
   La suite des fréquences forme une suite géométrique de raison $q = 2^{\frac{1}{12}}$? Soit f la fréquence correspondant à la note la plus basse que Nathan puisse entendre. Déterminons le nombre n de demi-tons à retirer à la fréquence de LA_3 soit 440 Hz pour que f soit supérieure à 100.
   $\frac{440}{2^{\frac{n}{12}}} > 100 \quad 440 > 100 \times 2^{\frac{n}{12}} \quad 2^{\frac{n}{12}} < 4{,}4 \quad \frac{n}{12}\ln 2 < \ln 4{,}4 \quad n < 12\frac{\ln 4{,}4}{\ln 2} \quad 12\frac{\ln 4{,}4}{\ln 2} \approx 25{,}65$
   $n \in \mathbb{N}$ il faut donc diminuer la fréquence du LA$_3$ de 25 demi-tons ce qui correspond à SOL#$_1$.
4. **a.** Lors du concert d'une chorale, l'intensité sonore maximale était de 4.10^{-4} W.m^{-2}.
   Nathan n'a pas pu rester dans la salle. Calculons $N(I)$
   Si un son possède une intensité sonore I (exprimée en W.m^{-2}), son niveau sonore est exprimé en décibels (dB) par : $N(I) = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$
   $N(I) = 10\log\frac{4}{10^{-12}} \approx 126$. Le niveau sonore était donc trop élevé car $126 > 90$.
   b. Nathan souhaite assister au concert d'un orchestre de 60 instruments identiques. On suppose que tous les instruments ont la même intensité sonore notée I et le même niveau sonore noté $N(I)$. De plus Nathan perçoit tous les instruments de l'orchestre avec la même intensité sonore.

Montrons que le niveau sonore perçu par Nathan est égal à $N(I) + 10\log 60$.

$N(60 \times I) = 10\log\left(\frac{60\times I}{10^{-12}}\right) = 10\log\left(60 \times \frac{I}{10^{-12}}\right)$

$N(60I) = 10\left(\log 60 + \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)\right) = 10\log 60 + 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 10\log 60 + N(I)$.

Le résultat est bien montré.

c. En déduire le niveau sonore maximum de chaque instrument pour que le concert soit supportable par Nathan. Nous devons donc avoir au maximum $N(I) + 10\log 60 = 90$ d'où

$N(I) = 90 - 10\log 60 = 72{,}21$.

Le niveau sonore de chaque instrument ne devra pas dépasser 72,21 dB.

EXERCICE 2 — 6 points

Une étude a été réalisée en 2015 en France sur 550 festivals de musique.
On y apprend que :

- 220 festivals avaient une thématique unique, parmi lesquels 35 % étaient dédiés à la musique de chambre.
- 330 autres festivals avaient plusieurs thématiques parmi lesquels certains proposaient de la musique de chambre dans leur programmation.

On choisit au hasard un festival parmi les 550 considérés dans cette étude.
On note :

T l'évènement « le festival avait une thématique unique »,

C l'évènement« le festival proposait de la musique de chambre dans sa programmation »,

B étant un évènement de probabilité non nulle, on note $P_B(A)$ la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

On note B l'évènement contraire d'un évènement B.

Dans l'ensemble de l'exercice on arrondira, si nécessaire, les résultats au centième.

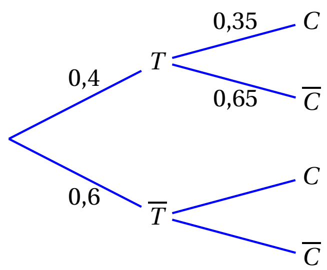
1. À l'aide des données de l'énoncé :

a. La valeur de la probabilité $P_T(C)$ de l'évènement C sachant que l'évènement T est réalisé est 0,35 car parmi lesquels 35 % étaient dédiés à la musique de chambre..

b. La probabilité $P(T)$ de l'évènement T vaut $0,4$ car

Il y a 220 cas favorables sur 550 cas possibles. $\dfrac{220}{550} = 0{,}4$.

2. a. Nous avons complété l'arbre pondéré ci-dessous correspondant à la situation décrite dans l'énoncé.



b. La probabilité que le festival était un festival ayant une thématique unique et proposait de la musique de chambre dans sa programmation est notée $P(T \cap C)$.

$P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C) = 0{,}4 \times 0{,}35 = 0,14$.

3. Selon l'étude, 39 % des festivals proposaient de la musique de chambre dans leur programmation. Nous en déduisons que $P(C) = 0{,}39$.

a. Montrons que $P\left(\overline{T} \cap C\right)$ est égale à $0,25$.

C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers donc $P(C) = P(T \cap C) + P\left(\overline{T} \cap C\right)$.

$0{,}39 = 0{,}14 + P\left(\overline{T} \cap C\right)$ d'où $P\left(\overline{T} \cap C\right) = 0{,}39 - 0{,}14 = 0{,}25$

b. La probabilité que le festival ait proposé de la musique de chambre sachant que ce festival n'avait pas une thématique unique est notée $P_{\overline{T}}(C)$.

$$P_{\overline{T}}(C) = \frac{P\left(\overline{T} \cap C\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \frac{0{,}25}{0{,}6} \approx 0{,}42.$$

EXERCICE 3 PORTANT SUR L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE **7 points**

Cet exercice comporte deux parties qui peuvent être traitées indépendamment

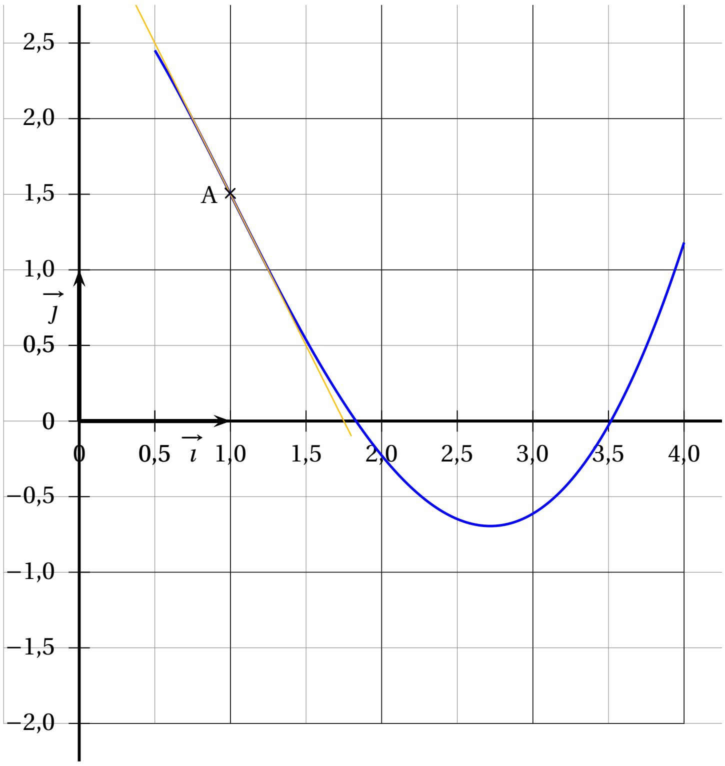
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0,5\,;\,4]$. On désigne par f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie 1 : Lecture graphique

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Les réponses aux questions suivantes sont données avec la précision permise par la lecture du graphique.

1. La valeur de $f(1)$ est 1,5 et celle de $f(3)$ d'environ $-0,6$.
2. Le nombre dérivée de f en 1 $f'(1)$ a pour valeur environ -2.
3. Construisons le tableau de signes de f', la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;4]$.

x	0,5		$\approx 2,7$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	



Partie 2 : Étude de la fonction f

On désigne par ln la fonction logarithme népérien.
On note e l'unique nombre réel vérifiant $\ln(\text{e}) = 1$.
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,4]$ par :

$$f(x) = x^2 \ln x - 1,5x^2 + 3.$$

1. La valeur exacte de $f(1)$ est $1^2 \ln 1 - 1,5 \times 1^2 + 3 = 1,5$ et celle de $f(\text{e})$ est $\text{e}^2 \ln \text{e} - 1,5\text{e}^2 + 3 = -0,5\text{e}^2 + 3$.
2. Pour tout réel x de l'intervalle $[0,5\,;\,4]$:
   $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} - 1,5(2x) = 2x \ln x - 2x = 2x(\ln x - 1)$.
3. Étudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5\,;\,4]$.
   Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\quad \ln x - 1 > 0 \iff x > \text{e}$

x	0,5		e		4
$\ln x - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Donnons les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 4]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Sur $[0,5\ ;\ \text{e}[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $]\text{e}\ ;\ 4]$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Construisons le tableau de variation de f sur $[0,5\ ;\ 4]$.

x	0,5		e		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$\approx 2,45$	$\searrow$	$3 - 0,5\text{e}^2$	$\nearrow$	$\approx 1,18$

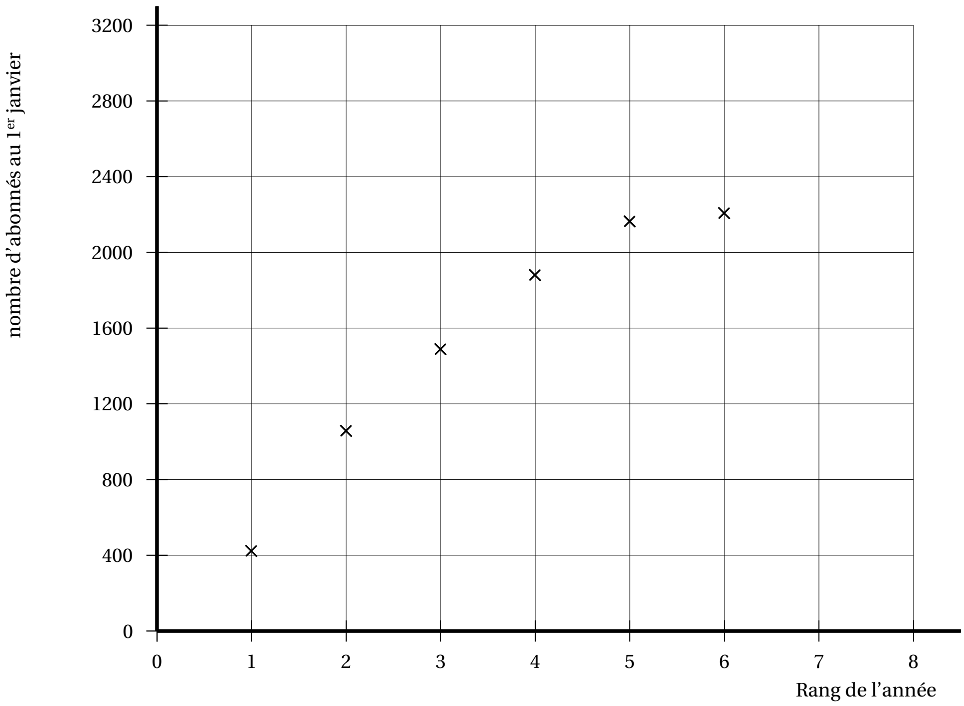
4. On désigne par A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1. On note T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.
Déterminons une équation de la droite T.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$
$f(1) = 1,5 \quad f'(1) = 2(\ln 1 - 1) = -2$. T a pour équation $y = -2\,(x-1) + 1,5$ d'où $y = -2x + 3,5$.

EXERCICE 4 PORTANT SUR L'ENSEIGNEMENT RENFORCÉ — 7 points

La rédaction d'un magazine culturel se réunit pour évoquer l'évolution du nombre d'abonnés depuis sa création et établir des prévisions sur cette évolution. Les données sur les six dernières années sont indiquées dans le tableau suivant :

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'abonnés au 1er janvier : y_i	427	1052	1483	1875	2158	2202

Le nuage de points de coordonnées $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à cette série est représenté ci-dessous :



Partie 1

Dans un premier temps le modèle retenu par la rédaction est un ajustement affine.

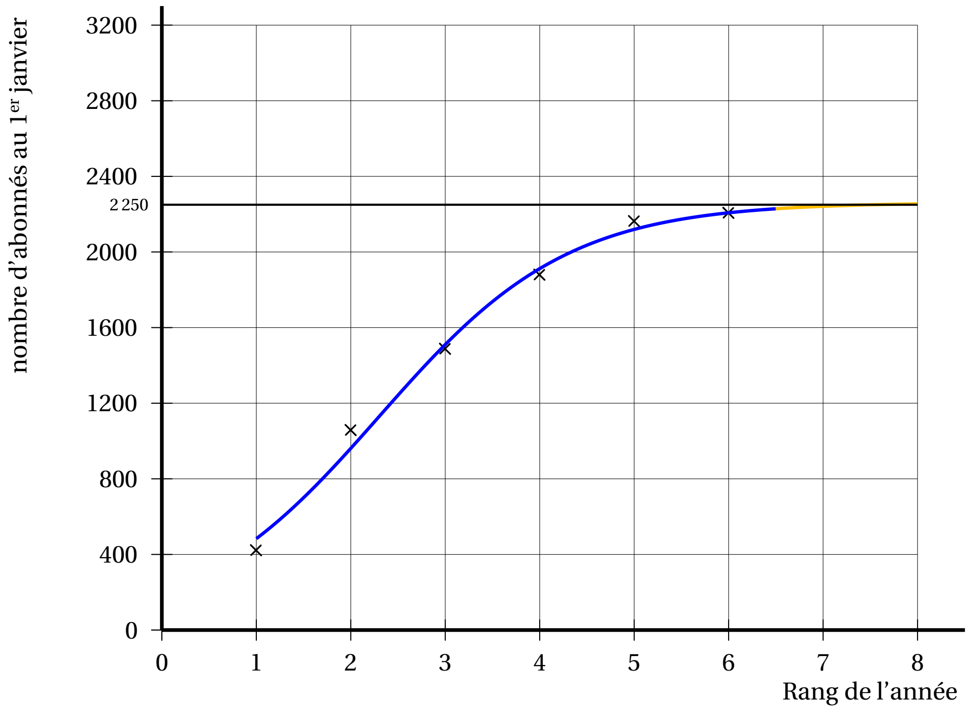
1. En utilisant la calculatrice, l'équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de y en x du nuage de points, obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 360x + 274$. Les valeurs de a et b sont arrondies à l'unité.
2. À l'aide de ce modèle et en expliquant la démarche :
   a. Déterminons une estimation du nombre d'abonnés au 1er janvier en 2018.
   En 2018, $x = 8$. En remplaçant x par 8 dans l'équation de la droite nous trouvons
   $y = 360 \times 8 + 274 = 3\,154$
   b. Déterminons une estimation de l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés au 1er janvier sera supérieur à 4 000. Pour ce faire, résolvons $360x + 274 \geqslant 4000$
   $360x + 274 \geqslant 4000 \quad 360x \geqslant 3726 \quad x \geqslant \dfrac{3\,726}{360} \quad \dfrac{3\,726}{360} \approx 10{,}35.$
   Selon ce modèle, nous pouvons estimer qu'en 2021, le nombre d'abonnés sera supérieur à 4 000.

Partie 2

Un journaliste de la rédaction fait remarquer que le dernier point du nuage se distingue.
La rédaction choisit de modéliser l'évolution du nombre d'abonnés au 1er janvier jusqu'en 2030 par la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 20] par

$$f(x) = 2\,262\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 10},$$

où x modélise le rang de l'année mesuré à partir de 2010.
Ainsi, pour n entier naturel non nul et inférieur ou égal à 20, $f(n)$ est une estimation du nombre d'abonnés au 1er janvier de l'année $2010 + n$.
Une partie de la représentation graphique de la fonction f est tracée ci-dessous avec le nuage points associé à la série :



1. Une estimation pour ce modèle du nombre d'abonnés au 1er janvier 2018 est d'environ 2 250.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [1 ; 20].
   Pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 20] on a : $f'(x) = 2\,262\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 10) - \mathrm{e}^x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 10)^2} = 22\,620\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 10)^2}$.
3. Sur cet intervalle $f'(x) > 0$ comme produit et quotient de réels strictement positifs donc f est strictement croissante sur [1 ; 20]

4. Un journaliste affirme que selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 1er janvier ne dépassera jamais 2 300 avant 2030. Cette affirmation est-elle exacte ? Pour vérifier cette affirmation, résolvons $f(x) \geqslant 2\,300$.

$$\begin{aligned}
2\,262\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+10} &\geqslant 2\,300\\
2\,262\mathrm{e}^x &\geqslant 2\,300(\mathrm{e}^x+10)\\
2\,262\mathrm{e}^x &\geqslant 2\,300\mathrm{e}^x+23\,000\\
2\,262\mathrm{e}^x-2\,300\mathrm{e}^x &\geqslant 23\,000\\
-38\mathrm{e}^x &\geqslant 23\,000
\end{aligned}$$

Il en résulte que cette inégalité est fausse pour tout $x \in [1~;~20]$. L'affirmation est donc vraie mais nous pouvons remarquer que le nombre d'abonnés ne dépassera jamais 2 262 si le modèle reste valable sur $[1~;~+\infty[$.