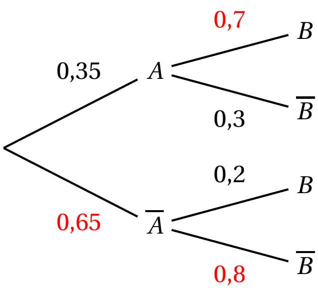
Corrigé du baccalauréat Métropole 17 juin 2015
Technique de la musique et de la danse –

Exercice 1 — 6 points

Partie I

L'arbre pondéré ci-dessous a été construit à partir d'une expérience aléatoire.
L'arbre proposé dans le texte est complété en rouge :



1. La probabilité de l'évènement $A \cap B$ est :

a. 0,105 **b.** 0,7 **c.** $\boxed{0,245}$

$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,35 \times 0,7 = 0,245$

2. La probabilité de l'évènement B est :

a. $\boxed{0,375}$ **b.** 0,9 **c.** 0,395

D'après la formule des probabilités totales : $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = 0,245 + 0,65 \times 0,2 = 0,375$

3. La probabilité de l'évènement A, sachant que l'évènement B est réalisé, est :

a. 0,245 **b.** $\boxed{0,653}$ **c.** 0,7

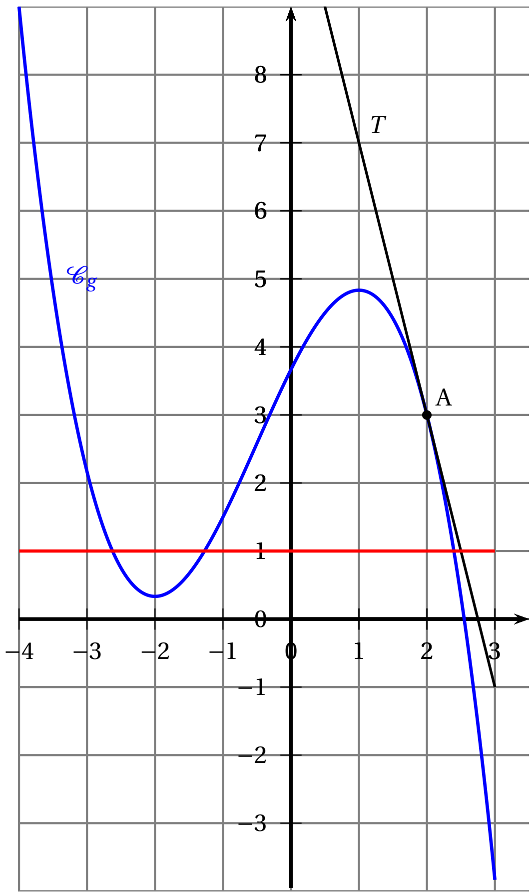
$p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,245}{0,375} \approx 0,653$

Partie II

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$.

On a tracé sa représentation graphique $\mathscr{C}_g$ ci-contre dans un repère du plan ainsi que la tangente T à cette courbe au point A d'abscisse 2.

On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$.



1. Sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$ l'équation $g(x) = 1$ admet

a. 1 solution **b.** $\boxed{\text{3 solutions}}$ **c.** 4 solutions

La courbe et la droite horizontale d'équation $y = 1$ ont trois points d'intersection dont les abscisses sont les solutions de l'équation $g(x) = 1$.

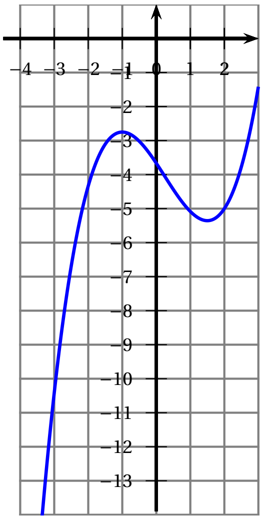
2. Le nombre dérivé de la fonction g en 2, $g'(2)$, vaut

a. -4 **b.** $\boxed{-\dfrac{1}{4}}$ **b.** 3

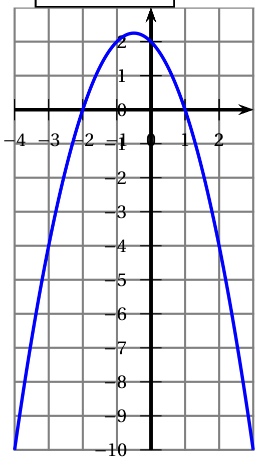
Le nombre dérivé est égal au coefficient directeur de la tangente T qui passe par les points A(2; 3) et B(3 : −1). Il vaut donc $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-2}{-1-3} = -\dfrac{1}{4}$.

3. Parmi les représentations graphiques ci-dessous, une courbe pouvant représenter la fonction dérivée g' est

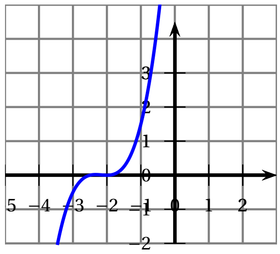
a. la courbe 1



b. $\boxed{\text{la courbe 2}}$



c. la courbe 3



En regardant les variations de la fonction g, la fonction dérivée doit être négative sur $[-4\,;\,-2]$, positive sur $[-2\,;\,1]$, puis négative sur $[1\,;\,3]$.

Exercice 2 — 7 points

1. On rajoute une quarte à la note LA$_3$.

a. On rajoute une quarte donc 5 demi-tons :

$$\overbrace{\dots\quad \text{SOL}\sharp\quad \text{LA}\quad \text{LA}\sharp\quad \text{SI}}^{\text{octave 3}}\quad \overbrace{\text{DO}\quad \text{DO}\sharp\quad \text{RÉ}\quad \text{RÉ}\sharp\quad \dots}^{\text{octave 4}}$$

$$\text{LA} \xrightarrow{+5} \text{RÉ}$$

On obtient la note RÉ de l'octave du dessus, soit RÉ$_4$.

b. La suite des fréquences des notes est géométrique de raison q tel que $q^{12} = 2$; autrement dit, $q = 2^{\frac{1}{12}}$. La fréquence f de la note RÉ$_4$ est donc $f = 440 \times q^5 = 440 \times 2^{\frac{5}{12}} \approx 587$ Hz.

2. Julien prétend qu'en ajoutant des tierces majeures à la note DO, il peut obtenir toutes les notes (DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI).

En ajoutant des tierces majeures, soit 4 demi-tons, on passe de DO à MI, puis de MI à SOL$\sharp$, puis de SOL$\sharp$ à DO, et on recommence. Donc on n'atteint pas toutes les notes et donc Julien a tort.

3. Une guitare classique a un niveau sonore d'environ 85 dB.

Le niveau sonore $L(I)$ est donné en fonction de l'intensité par la formule $L(I) = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$.

On cherche donc l'intensité I_G telle que $L(I_G) = 85$:

$10\log\left(\dfrac{I_G}{I_0}\right) = 85 \iff \log\left(\dfrac{I_G}{I_0}\right) = 8{,}5 \iff \dfrac{I_G}{I_0} = 10^{8,5} \iff I_G = 10^{8,5} \times I_0$

Or $I_0 = 10^{-12}$ donc $I_G = 10^{8,5} \times 10^{-12} \iff I_G = 10^{-3,5}$

L'intensité de la guitare est donc d'environ $10^{-3,5}$ W.m^{-2}.

4. À partir du LA$_3$ on monte jusqu'à une note de fréquence 987 Hz.

a. On monte d'un demi-ton en multipliant la fréquence par le nombre q.
On cherche donc l'entier n tel $440 \times q^n = 987$ ou encore $440 \times 2^{\frac{n}{12}} = 987$.

$$440 \times 2^{\frac{n}{12}} = 987 \iff 2^{\frac{n}{12}} = \frac{987}{440} \iff \log\left(2^{\frac{n}{12}}\right) = \log\left(\frac{987}{440}\right) \iff \frac{n}{12}\log(2) = \log\left(\frac{987}{440}\right)$$

$$\iff n = 12 \times \frac{\log\left(\frac{987}{440}\right)}{\log(2)} \iff n \approx 14$$

On est donc monté de 14 demi-tons, et on est arrivé à la note SI_4.

b. La différence de hauteur entre ces deux notes de fréquences f_1 et f_2 est donnée, en savarts, par $1\,000\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$. Or $1\,000\log\left(\frac{987}{440}\right) \approx 351$
La différence de hauteur entre ces deux notes est d'environ 351 savarts.

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 7 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [1~;~7]$ par $f(x) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{3}{2} - \ln(x)\right)$.

1. $f(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \ln(1)\right) = \frac{3}{4}$; $f(\text{e}) = \frac{\text{e}^2}{2}\left(\frac{3}{2} - \ln(\text{e})\right) = \frac{\text{e}^2}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{\text{e}^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\text{e}^2}{4}$
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

a. On applique la formule de dérivation d'un produit :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times \left(\frac{3}{2} - \ln(x)\right) + \frac{x^2}{2} \times \left(0 - \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}x - x\ln(x) - \frac{x}{2} = x - x\ln(x) = x(1 - \ln(x))$$

b.
- $1 - \ln(x) = 0 \iff 1 = \ln(x) \iff \ln(\text{e}) = \ln(x) \iff \text{e} = x \iff x = \text{e}$
- $1 - \ln(x) > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff \ln(\text{e}) > \ln(x) \iff \text{e} > x \iff x < \text{e}$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

c. $f(7) = \frac{49}{2}\left(\frac{3}{2} - \ln(7)\right) \approx -10,9$
On établit le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I :

x	1		e		7
$1 - \ln(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\text{e}^2}{4}$	$\searrow$	$\frac{49}{2}\left(\frac{3}{2} - \ln(7)\right)$

3. On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

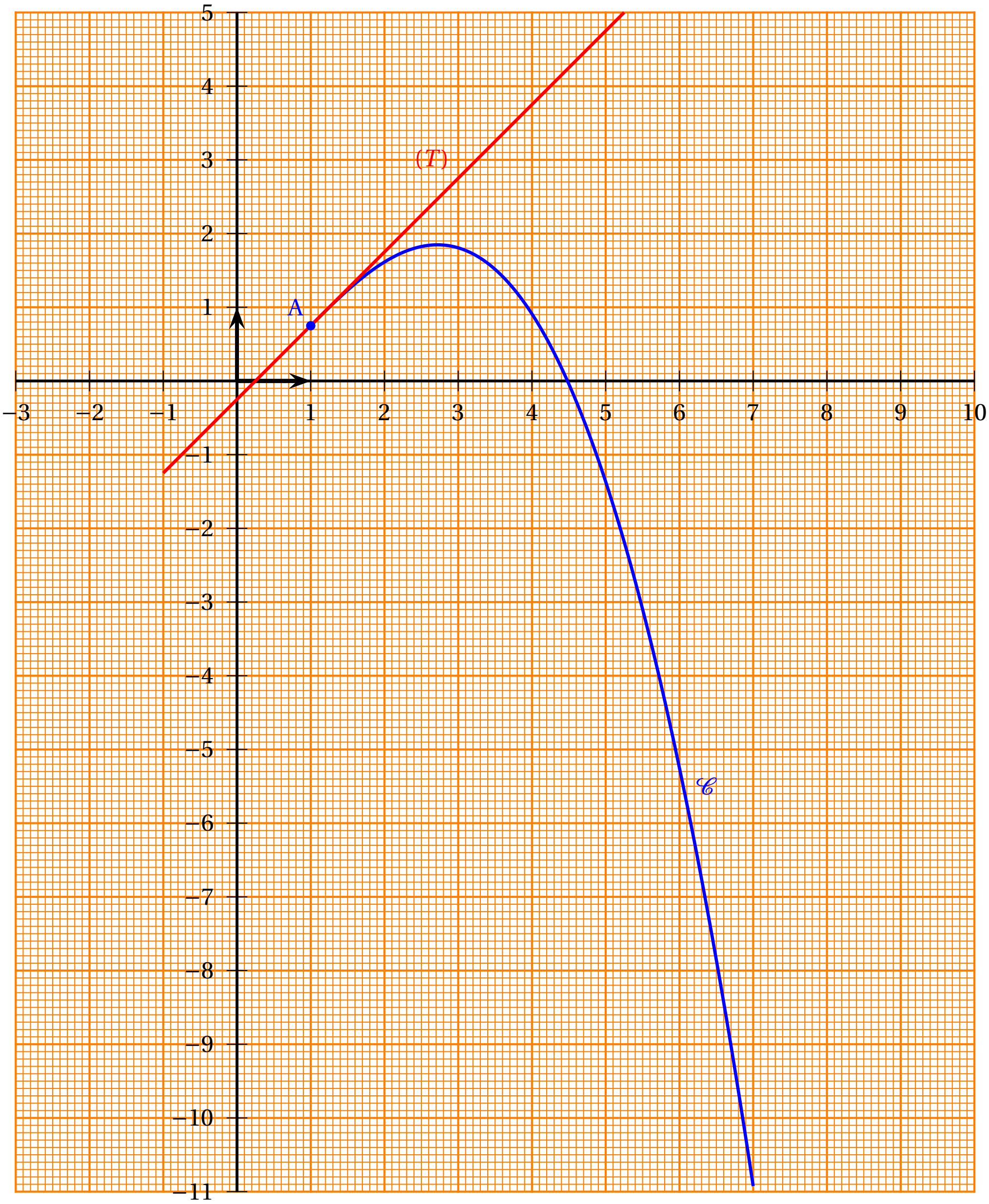
a. Le coefficient directeur de la tangente (T) est $f'(1) = 1(1 - \ln(1)) = 1$.

b. Une équation de (T) est donnée par $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y = 1(x-1) + \frac{3}{4}$ c'est-à-dire $y = x - \frac{1}{4}$.

4. On complète le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0,75	1,61	1,81	0,91	$-1,37$	$-5,25$	-10,92

5. Dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on trace la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente (T) :



6. a. $f(x) = 0 \iff \dfrac{x^2}{2}\left(\dfrac{3}{2} - \ln(x)\right) = 0 \iff \dfrac{x^2}{2} = 0$ ou $\dfrac{3}{2} - \ln(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\text{e}^{\frac{3}{2}} = x$

Or $0 \notin I$ donc la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans I est $x = \text{e}^{\frac{3}{2}}$.

b. On en déduit que :

- si $x \in \left[1~;~\text{e}^{\frac{3}{2}}\right[$, alors $f(x) > 0$;
- si $x = \text{e}^{\frac{3}{2}}$, alors $f(x) = 0$;
- si $x \in \left]\text{e}^{\frac{3}{2}}~;~7\right]$, alors $f(x) < 0$.

EXERCICE 3 Enseignement renforcé (au choix) 7 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $I = [-1\,;\,2]$ par : $f(x) = \mathrm{e}x - \mathrm{e}^x + 2$.
On note f' la fonction dérivée de f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 2 centimètres.

1. $f(0) = \mathrm{e} \times 0 - \mathrm{e}^0 + 2 = -1 + 2 = 1$
2. $f'(x) = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x$
3. **a.**
   - $\mathrm{e} - \mathrm{e}^x = 0 \iff \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^x \iff 1 = x \iff x = 1$
   - $\mathrm{e} - \mathrm{e}^x > 0 \iff \mathrm{e}^1 > \mathrm{e}^x \iff 1 > x \iff x < 1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante.

   b. $f(-1) = \mathrm{e} \times (-1) - \mathrm{e}^{-1} + 2 = 2 - \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -1{,}08$; $f(1) = \mathrm{e} \times 1 - \mathrm{e}^1 + 2 = 2$; $f(2) = 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2 + 2 \approx 0{,}048$

   On établit le tableau de variation de f :

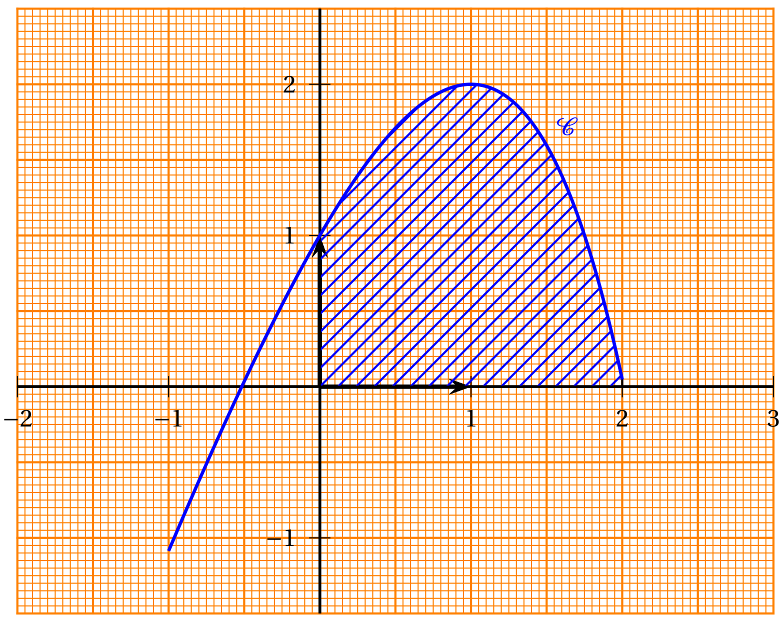
x	-1		1		2
$f'(x) = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2 - \mathrm{e} - \frac{2}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2 + 2$

   c. La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en des points dont les abscisses annulent la dérivée ; donc au point

   d. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs approchées au centième près :

x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	$-1{,}09$	$0{,}03$	1	$1{,}71$	2	$1{,}6$	$0{,}05$

4. Dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on trace la courbe $\mathscr{C}$ (voir page suivante).



5. **a.** Soit F la fonction définie sur l'intervalle I par $F(x) = \mathrm{e}\dfrac{x^2}{2} - \mathrm{e}^x + 2x$.

$F'(x) = \mathrm{e} \times \dfrac{2x}{2} - \mathrm{e}^x + 2 = \mathrm{e}x - \mathrm{e}^x + 2 = f(x)$ donc F est une primitive de f sur I.

b. Voir figure page suivante.

c. La fonction f est positive sur $[0\,;\,2]$ donc l'aire du domaine hachuré est en unités d'aire :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = F(2) - F(0) = \left(\mathrm{e}\frac{4}{2} - \mathrm{e}^2 + 4\right) - \left(0 - \mathrm{e}^0 + 0\right) = 5 + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2$.

L'unité sur chaque axe étant de 2 cm, une unité d'aire vaut donc 4 cm^2.

L'aire de la partie hachurée est donc égale à $4\left(5 + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2\right)$ cm^2 soit environ 12,19 cm^2.