∽ Corrigé du baccalauréat technologique TMD Métropole ∾
6 septembre 2018

Le candidat traitera **trois** EXERCICES :

- **Obligatoirement l'exercice 1**
- **Obligatoirement l'exercice 2**
- **L'exercice** 3 (qui porte sur le programme de l'enseignement obligatoire)
  OU l'exercice 4 (qui porte sur le programme de l'enseignement renforcé.

Le candidat indiquera clairement son choix sur la copie.

L'annexe est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 **7 points**

Un club de loisirs propose des activités artistiques et compte 150 inscrits :

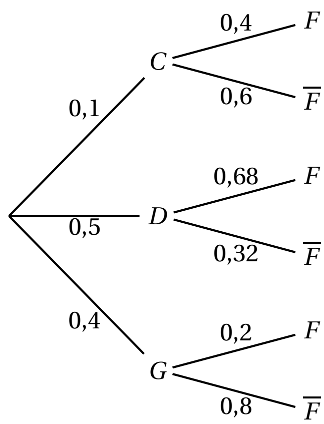
- 15 inscrits en chant ;
- 75 en danse ;
- 60 en graphisme.

Chaque inscrit pratique une et une seule activité.
Parmi les inscrits en chant, 40 % sont des filles.
Parmi les inscrits en danse, 68 % sont des filles.
Parmi les inscrits en graphisme, 20 % sont des filles.
On choisit au hasard un inscrit de ce club. Chaque inscrit a la même probabilité d'être choisi.
On note F l'évènement : « l'inscrit est une fille »,
C l'évènement : « l'inscrit pratique le chant »,
D l'évènement : « l'inscrit pratique la danse »,
G l'évènement : « l'inscrit pratique le graphisme ».

On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.
B étant un évènement de probabilité non nulle, on note $p_B(A)$ la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.
On note $\overline{B}$ l'évènement contraire d'un évènement B.

L'univers est l'ensemble des inscrits au club de loisirs. La loi mise sur cet univers est la loi équiprobable.
Il en résulte que la probabilité d'un événement A est : $P(A) = \dfrac{\text{cardinal de A}}{\text{cardinal de l'univers}}$.
Le cardinal de l'univers est 150.

1. Donnons à partir de l'énoncé :
   a. La probabilité $P(G)$ de l'évènement G :$P(G) = \dfrac{60}{150} = 0{,}4$.
   b. La probabilité $P_G(F)$ de l'évènement F sachant que l'évènement G est réalisé : $P_G(F) = 0{,}2$ car parmi les inscrits en graphisme, 20 % sont des filles.
2. Construisons un arbre pondéré représentant la situation.



3. La probabilité que l'inscrit soit une fille et qu'elle pratique le chant est notée $P(C \cap F)$.
   $P(C \cap F) = P(C) \times P_C(F) = 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}04$
4. Montrons que la probabilité que l'inscrit soit une fille est égale à 0,46. C, D et G forment une partition de l'univers car ils sont non vides, deux à deux disjoints et leur réunion est l'univers.
   $P(F) = P(C \cap F) + P(D \cap F) + P(G \cap F) = P(C) \times P_C(F) + P(D) \times P_D(F) + P(G) \times P_G(F)$.
   $P(F) = 0{,}04 + 0{,}5 \times 0{,}68 + 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}46$
5. Sachant que l'inscrit est une fille, la probabilité qu'elle pratique le chant est notée $P_F(C)$.
   $P_F(C) = \dfrac{P(C \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}46} \approx 0{,}0869565$ soit 0,087 à 10^{-3} près.
6. Les évènements D et F sont indépendants si et seulement si $P(D \cap F) = P(D) \times P(F)$
   $P(D \cap F) = 0{,}37 \qquad P(D) \times P(F) = 0{,}5 \times 0{,}46 = 0{,}23$.
   Les événements ne sont pas indépendants.

EXERCICE 2 **7 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x) = \frac{x^3}{\mathrm{e}^x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[0;4]$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.
   Calculons $f'(x)$, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;4]$.

$$f'(x) = \frac{(3x^2)\mathrm{e}^x - x^3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{x^2\mathrm{e}^x(3-x)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{x^2(3-x)}{\mathrm{e}^x}.$$

2. Étudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;4]$.
   Pour tout x appartenant à $]0;4]$, $\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$ est strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $3-x$

x	-1		3		4
$3-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. Donnons les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
   Sur $[0\,;\,3[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
   Sur $]3\,;\,4]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Construisons le tableau de variation de f sur $[0;4]$.

x	0		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$\frac{27}{\mathrm{e}^3}$	$\searrow$	$\frac{64}{\mathrm{e}^4}$

4. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ possède deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, l'une au point O origine du repère, l'autre en un point A.
   Les coordonnées exactes du point A sont $(3\,;\,f(3))$ soit $\left(3\,;\,\frac{27}{\mathrm{e}^3}\right)$.

5. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 2.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a
$y = f(a) + f'(a)(x-a)$
$f(2) = \dfrac{2^3}{\text{e}^2}$ $\quad f'(2) = \dfrac{4(3-2)}{\text{e}^2}$. T a pour équation $y = \dfrac{4}{\text{e}^2}(x-2) + \dfrac{8}{\text{e}^2}$ d'où $y = \dfrac{4}{\text{e}^2}x$

6. Complétons à l'aide de la calculatrice, le tableau de valeurs ci-dessous, les résultats sont arrondis au dixième.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0,4	1,1	1,3	1,2

7. **Sur la feuille de papier millimétré fournie, à rendre avec la copie**, la droite T et la courbe $\mathscr{C}$ sont représentées, dans le repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm pour l'axe des abscisses et 5 cm pour l'axe des ordonnées, page 6. On pourra s'aider des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points O et A.

EXERCICE 3 PORTANT SUR L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE **6 points**

Cet exercice est un QCM.
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie (a, b ou c). Chaque réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse est comptée zéro point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

Rappels

- Dans la gamme de tempérament égal :
  — Une octave est divisée en 12 demi-tons égaux séparant les notes. Quand on monte d'un demi- ton, la fréquence de la note est multipliée par $q = 2^{\frac{1}{12}}$
  — Une quarte juste contient cinq demi-tons. Une quinte juste contient sept demi-tons.
  — Les notes d'une octave sont : DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI.
- Lorsque deux notes ont pour fréquence f_1 et f_2 avec $f_1 \leqslant f_2$ la différence de hauteur entre ces deux notes, exprimée en savarts, est égale à $10^3 \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, où log désigne la fonction logarithme décimal.
- Si I est l'intensité sonore (exprimée en W.m^{-2}) d'un son, alors son niveau sonore, exprimé en décibels (dB), est $N(I) = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}.
- Les intensités sonores s'ajoutent.

1. En partant de la note SI, on ajoute cinq quartes justes. La note obtenue est :

a. ~~un SI~~ **b.** ~~un LA#~~ **c.** $\boxed{\text{un DO}}$

Cinq quartes justes : $5 \times 5 = 25 = 2 \times 12 + 1$

2. On ajoute deux quintes justes à une note de fréquence f. La fréquence de la note obtenue est :

a. $\cancel{f \times 2^{14}}$ **b.** $\boxed{f \times 2^{\frac{7}{6}}}$ **c.** $\cancel{14f}$

2 quintes justes 2×7 demi-tons soit 14 ;la suite des fréquences forme une suite géométrique de raison $q = 2^{\frac{1}{12}}$ d'où $f \times q^{14}$

3. On ajoute une octave à une note N_1. On obtient une note N_2. La mesure en savarts de la différence de hauteur entre les notes N_1 et N_2 est :

a. $\cancel{2\,000}$ **b.** $\boxed{1\,000\log 2}$ **c.** $\cancel{2 \times 10^3}$

une octave : 12 demi-tons d'où $f_2 = 2f_1$ hauteur en savarts : $1\,000\log\left(\frac{2f_1}{f_1}\right)$

4. L'intensité sonore correspondant à un niveau sonore de 70 décibels est :

a. $\cancel{2 \times 10^{-7}\ \text{W.m}^{-2}}$ **b.** $\boxed{10^{-5}\text{W.m}^{-2}}$ **c.** $\cancel{7\ \text{W.m}^{-2}}$

$10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 70 \quad \log I + 12 = 7$ d'où $I = 10^{-5}$

5. L'intensité sonore d'un son est multipliée par 5. Le niveau sonore augmente de :

a. $\boxed{10\log 5 \text{ dB}}$ **b.** ~~105 dB~~ **c.** ~~5 dB~~

$N(5I) = 10 \times \log\left(\frac{5I}{10^{-12}}\right) = 10 \times \left(\log\left(\frac{I}{10^{-12}} \times 5\right)\right) = 10 \times \left(\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)\right) + 10\log 5 = N(I) + 10\log 5$

6. En partant de la note RÉ, on ajoute n quintes, où n est un entier naturel. On obtient un DO#. L'entier n vérifie la congruence :

a. ~~$5n \equiv 11$ (modulo 12)~~ **b.** ~~$7n \equiv 1$ (modulo 12)~~ **c.** $\boxed{7n \equiv 11 \text{ (modulo 12)}}$

En ajoutant n quintes nous obtenons $7n$ demi-tons et entre RÉ et DO# il y a 11 demi-tons

EXERCICE 4 PORTANT SUR L'ENSEIGNEMENT RENFORCÉ **6 points**

Un diagnostic acoustique est réalisé dans une discothèque. Une mesure du niveau sonore moyen (en dB) est réalisée heure par heure à partir de 22 h.

La mesure réalisée entre 22 h et 23 h est celle de rang 1.

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Plage horaire	22 h–23 h	23 h–0 h	0 h–1 h	1 h–2 h	2 h–3 h
Rang des mesures : x_i	1	2	3	4	5
Niveau sonore moyen (en dB) : y_i	90	93	95	97	100

Par exemple, le niveau sonore moyen entre 2 h et 3 h du matin correspond à la mesure de rang 5 et vaut 100 dB.

1. Le nuage de points est représenté sur la **feuille annexe à rendre avec la copie** page 5, $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le repère orthogonal déjà construit.

2. On désigne par $\mathcal{D}$ la droite d'ajustement de y en x de cette série statistique, obtenue par la méthode des moindres carrés.

À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite $\mathcal{D}$ est : $y = 2,4x + 87,8$.

3. La droite $\mathcal{D}$ est représentée sur la **feuille annexe à rendre avec la copie**, dans le repère orthogonal déjà construit.

4. La réglementation impose, aux établissements ouverts au public et diffusant à titre habituel de la musique amplifiée, un niveau sonore moyen inférieur ou égal à 105 dB. On suppose que la discothèque respecte la réglementation jusqu'à sa fermeture qui a lieu à 7 h du matin.

L'ajustement déterminé dans la question **2.** ne semble pas adapté pour représenter l'évolution du niveau sonore de cette discothèque jusqu'à l'heure de sa fermeture. Pour la plage horaire 6 h–7 h le rang est 9. Selon ce modèle le niveau sonore serait de $2,4 \times 9 + 87,8 = 109,4$ c'est-à-dire supérieur au niveau sonore respecté par l'établissement.

5. On choisit dans cette question de modéliser l'évolution du niveau sonore moyen jusqu'à la fermeture de la discothèque par la fonction f qui est définie sur l'intervalle $[1\,;\,9]$ par

$$f(x) = 89,4 + 5,84\ln x,$$

où x représente le rang de la mesure du niveau sonore moyen et ln la fonction logarithme népérien.

Ainsi, selon ce modèle, pour n entier naturel compris entre 1 et 9, $f(n)$ est une estimation du niveau sonore moyen de la mesure de rang n.

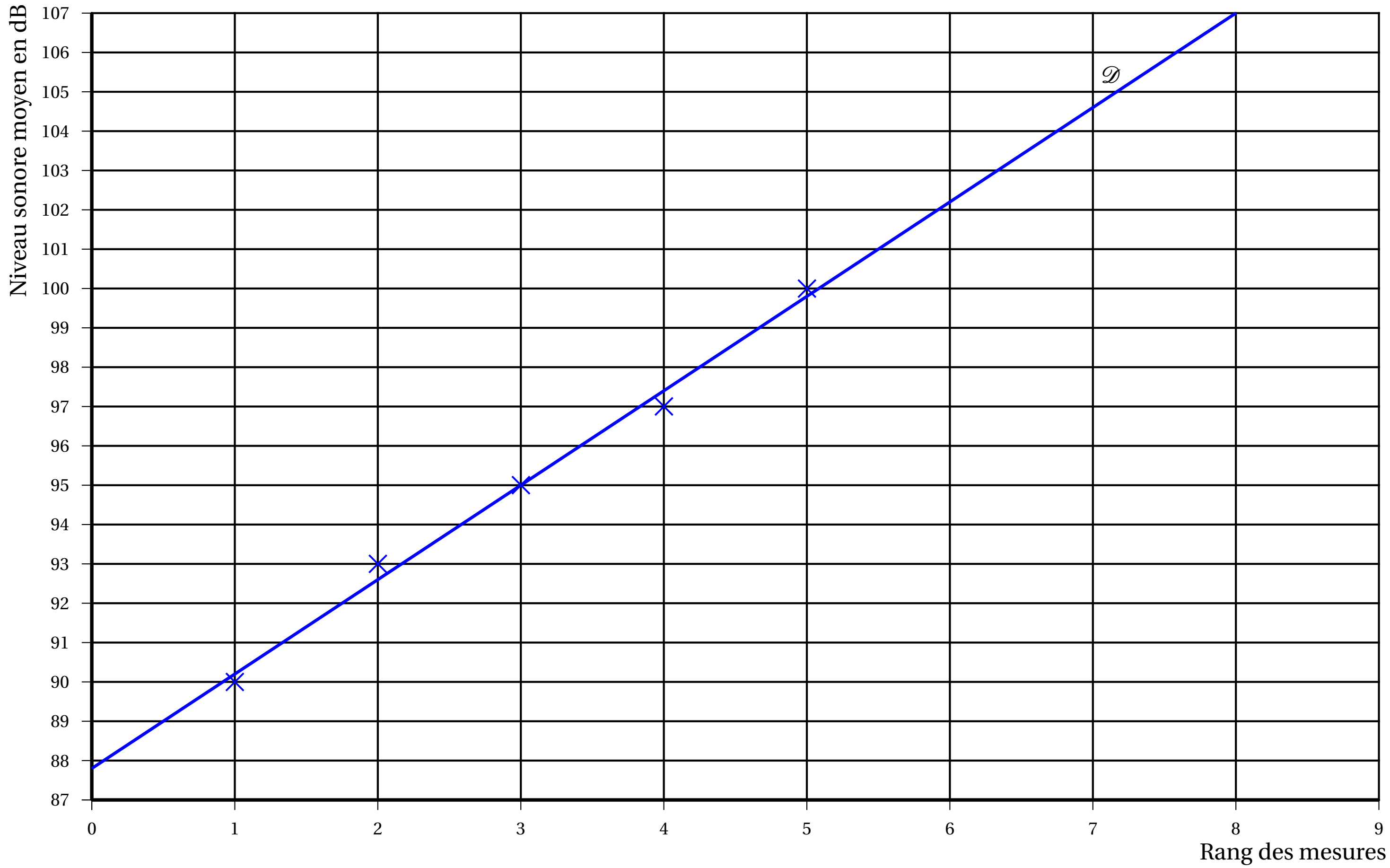
a. Déterminons le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,9]$.

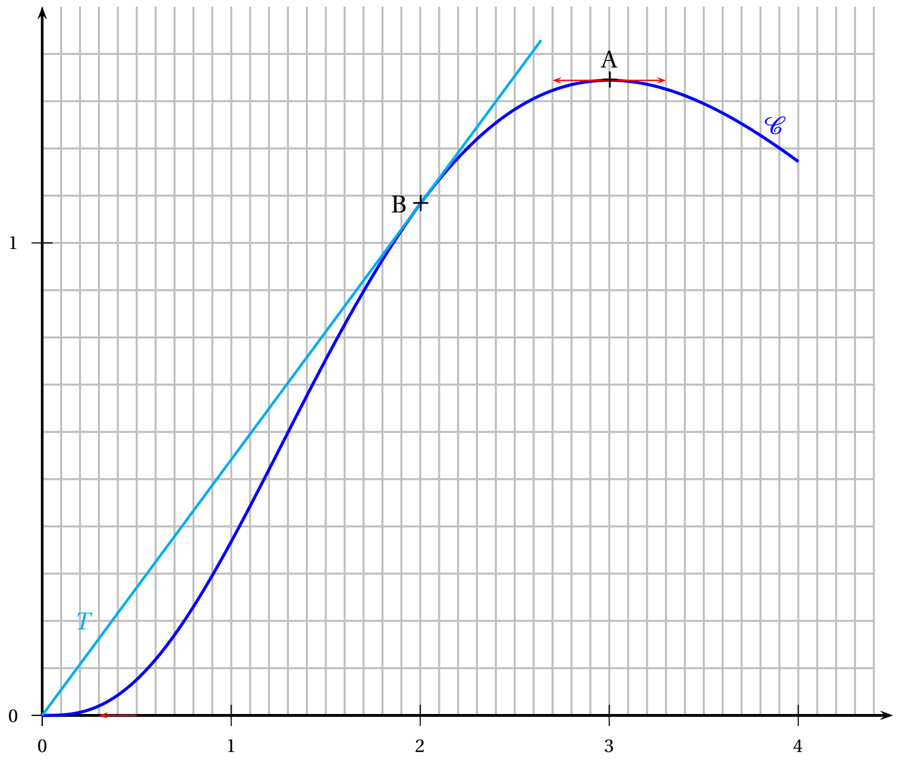
La fonction ln est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, *a fortiori* sur $[1\,;\,9]$. Multiplier la fonction par un nombre positif et ajouter un nombre ne changent rien au sens de variation, par conséquent f est une fonction strictement croissante sur $[1\,;\,9]$.

b. Justifier que selon ce modèle, le niveau sonore moyen jusqu'à la fermeture de la discothèque est toujours inférieur à 105 dB. Pour ce faire calculons $f(9)$ c'est-à-dire la valeur maximale du niveau sonore, $f(9) \approx 102,23$. Le niveau sonore reste bien selon ce modèle inférieur à 105 dB.

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 4 questions 1. et 3.




A
B
$\mathscr{C}$
T
1
0
0
1
2
3
4