∾ Corrigé du baccalauréat TMD Métropole ∾
juin 2004

EXERCICE **7 points**

$$f(x) = x + a + b\text{e}^{-x},$$

1. On a $f'(x) = 1 + (-1) \times b\text{e}^{-x} = 1 - b\text{e}^{-x}$.
2. Graphiquement on lit :
$\begin{cases} f(0) & = & 4 \\ f'(0) & = & 0 \end{cases}$
3. On a $f(0) = a + b$ et
$f'(0) = 1 - b$.
D'où $\begin{cases} a+b & = & 4 \\ 1-b & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b & = & 4 \\ 1 & = & b \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 3 \\ 1 & = & b \end{cases}$
Donc $f(x) = x + 3 + \text{e}^{-x}$.
4. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
5. de $+\infty$. Soit la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par :
$d(x) = f(x) - (x+3) = \text{e}^{-x}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$, ce qui signifie que la droite (D) d'équation $y = x+3$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
6. $\text{A}(-1\,;\, y) \in \mathscr{C} \iff y = -1 + 3 + \text{e}^1 = 2 + \text{e}$.
Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est :
$y - (2+\text{e}) = f'(-1)(x - (-1)) \iff y - (2+\text{e}) = (1-\text{e})(x+1) \iff y = 2 + \text{e} + x(1-\text{e}) + 1 - \text{e} \iff$
$y = x(1-\text{e}) + 3$
7. Voir à la fin la figure.

PROBLÈME **13 points**

$$f(x) = x^2\,(2\ln x - 3)\,,$$

Partie A

1. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln x - 3 = +\infty$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. On a $f'(x) = 2x(2\ln x - 3) + x^2 \times \dfrac{2}{x} = 4x\ln x - 6x + 2x = 4x\ln x - 4x = 4x(\ln x - 1)$.
3. $\ln x - 1 > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > \text{e}$ par croissance de la fonction exponentielle.
Comme $x \geqslant \dfrac{1}{\text{e}}$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du facteur $\ln x - 1$.
   - Sur $]\text{e}\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante.
   - De même sur $\left[\dfrac{1}{\text{e}}\,;\,+\text{e}\right[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante.
4.
   - $f\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right) = \left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)^2\left(2\ln\dfrac{1}{\text{e}} - 3\right) = \dfrac{1}{(\text{e})^2}(-2\ln\text{e} - 3) = \dfrac{1}{(\text{e})^2}(-2-3) = -\dfrac{5}{\text{e}^2}$;
   - $f(1) = 1^2(2\ln 1 - 3) = -3$;
   - $f\left(\sqrt{\text{e}}\right) = \left(\sqrt{\text{e}}\right)^2(2\ln\sqrt{\text{e}} - 3) = \text{e}\left(2 \times \frac{1}{2} - 3\right) = \text{e} \times (-2) = -2\text{e}$;
   - $f(\text{e}) = \text{e}^2(2\ln\text{e} - 3) = \text{e}^2(2-3) = -\text{e}^2$.

5.

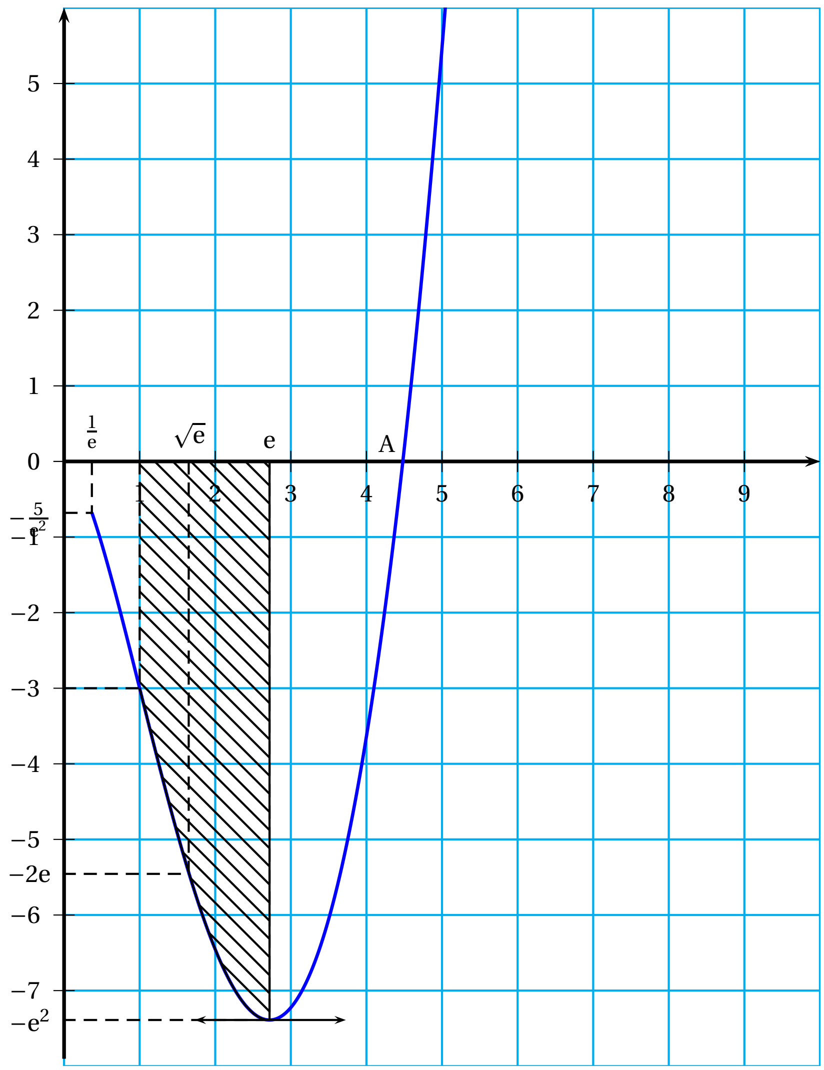
x	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	1	$\sqrt{\mathrm{e}}$	e	$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{\mathrm{e}^2} \approx -0,77$	-3	$-2\mathrm{e}$	$-\mathrm{e}^2 \approx -5,44$	$+\infty$

6. A a pour ordonnée 0, donc son abscisse x vérifie :

$x^2(2\ln x - 3) = 0 \iff 2\ln x - 3 = 0$, car $0 \notin \left[\frac{1}{\mathrm{e}} \ ; +\infty\right[$;

$2\ln x - 3 = 0 \iff 2\ln x = 3 \iff \ln x = \frac{3}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. $\mathrm{A}\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \ ; 0\right)$.

7. La tangente à la courbe au point d'abscisse e a pour coefficient directeur $f'(\mathrm{e}) = 4\mathrm{e}(\ln \mathrm{e} - 1) = 4\mathrm{e}(1-1) = 0$: la tangente est horizontale.



8. • Si $m < -\mathrm{e}^2$: 0 solution ;

• Si $m = -\mathrm{e}^2$: 1 solution ;

- Si $-\mathrm{e}^2 < m \leqslant -\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$: 2 solutions ;
- Si $m > -\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$: 1 solution.

Partie B

1.

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 \ln x - \frac{11}{9}x^3.$$

On a $F'(x) = 3 \times \frac{2}{3}x^2 \ln x + \frac{1}{x} \times \frac{2}{3}x^3 - 3 \times \frac{11}{9}x^2 =$
$2x^2 \ln x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{3}x^2 = 2x^2 \ln x - 3x^2 = x^2(2\ln x - 3) = f(x)$.

Conclusion F est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ +\infty\right[$.

2. D'après la question précédente :
$\mathrm{I} = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^3 \ln \mathrm{e} - \frac{11}{9}\mathrm{e}^3 - \left(\frac{2}{3}1^3 \ln 1 - \frac{11}{9}1^3\right) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{11}{9}\mathrm{e}^3 + \frac{11}{9} = \frac{11}{9} - \frac{5}{9}\mathrm{e}^3 \approx$
$-9,94$ au centième près.

Feuille annexe à rendre avec la copie