∽ Baccalauréat technique de la musique et de la danse ∾
Métropole juin 2005

EXERCICE **7 points**

Sur le schéma 1. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1 ; 5]$.
On précise que la courbe passe par les points O(0 ; 0), A (1 ; 1) et B (3 ; 0).

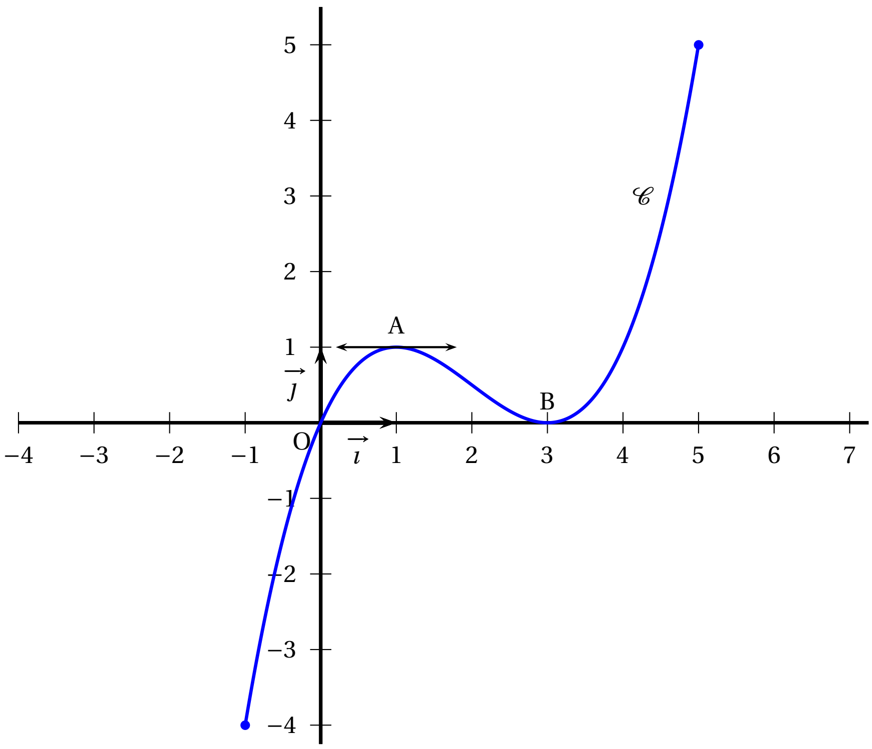


Schéma 1

1. L'un des trois schémas suivants, 2, 3 ou 4, correspond à la courbe représentative de la dérivée f' de f.
   D'après le schéma 1 :
   - la fonction f est croissante sur $[-1 ; 1]$ donc $f'(x)$ est positif sur $[-1 ; 1]$;
   - la fonction f est décroissante sur $[1 ; 3]$ donc $f'(x)$ est négatif sur $[1 ; 3]$;
   - la fonction f est croissante sur $[3 ; 5]$ donc $f'(x)$ est positif sur $[3 ; 5]$.

   Seule la fonction du schéma 2 vérifie ces trois conditions.

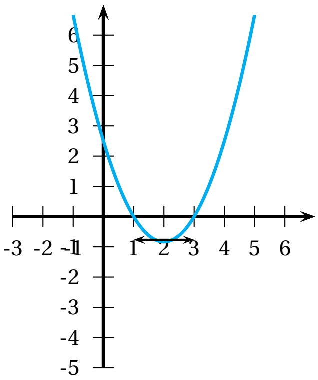


Schéma 2

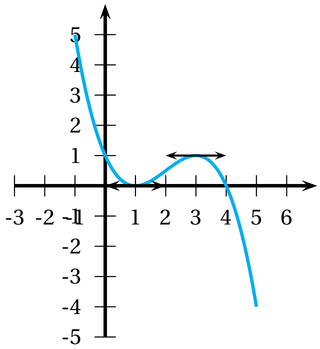


Schéma 3

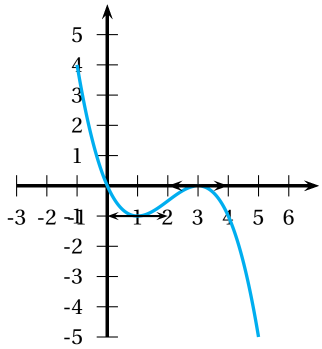


Schéma 4

2. Soit m un réel quelconque.

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ est le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.

D'après le schéma 1 :

- pour $m \in]-\infty\,;\,4[$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution ;
- pour $m \in [-4\,;\,0[$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution ;
- pour $m = 0$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions ;
- pour $m \in]0\,;\,1[$, l'équation $f(x) = m$ admet trois solutions ;
- pour $m = 1$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions ;
- pour $m \in]1\,;\,5]$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution ;
- pour $m \in]5\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution.

3. On admet que $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 + ax^2 + bx$ où a et b sont des nombres réels.

a. $f(1) = \dfrac{1}{4} \times 1^3 + a \times 1^2 + b \times 1 = \dfrac{1}{4} + a + b$

$f(3) = \dfrac{1}{4} \times 3^3 + a \times 3^2 + b \times 3 = \dfrac{27}{4} + 9a + 3b$

b. La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A $(1\,;\,1)$ donc $f(1) = 1$ ce qui équivaut à $\dfrac{1}{4} + a + b = 1$.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B $(3\,;\,0)$ donc $f(3) = 0$ ce qui équivaut à $\dfrac{27}{4} + 9a + 3b = 0$.

On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{4} + a + b & = & 1 \\ \dfrac{27}{4} + 9a + 3b & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & \dfrac{3}{4} - a \\ 9a + 3\left(\dfrac{3}{4} - a\right) & = & -\dfrac{27}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & \dfrac{3}{4} - a \\ 6a & = & -\dfrac{36}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & \dfrac{9}{4} \\ a & = & -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Donc $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{9}{4}x$.

c. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{9}{4}x$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{4} \times 3x^2 - \dfrac{3}{2} \times 2x + \dfrac{9}{4} \times 1 = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + \dfrac{9}{4}$.

$f'(1) = \dfrac{3}{4} - 3 + \dfrac{9}{4} = 0$ et $f'(3) = \dfrac{3}{4} \times 9 - 3 \times 3 + \dfrac{9}{4} = 0$

PROBLÈME 13 points

Soit f la fonction, définie sur $\mathbf{R}$, par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^{x})^2$ donc $f(x) = (\mathrm{e}^{x})^2 - 5\mathrm{e}^{x} + 4 = \mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 5) + 4$.
D'après le cours $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} - 5 = +\infty$ et donc par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 5\right) = +\infty$.
On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 5\right) + 4 = +\infty$ c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   b. D'après le cours $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} - 5 = -5$ et donc par produit $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 5\right) = 0$.
On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 5\right) + 4 = 4$ c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$.
Cela signifie que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite D d'équation $y = 4$ comme asymptote en $-\infty$.

   c. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 0 = 2(\mathrm{e}^{x})^2 - 5\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}(2\mathrm{e}^{x} - 5)$

   d. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2\mathrm{e}^{x} - 5$.
$2\mathrm{e}^{x} - 5 > 0 \iff \mathrm{e}^{x} > \dfrac{5}{2} \iff x > \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$
Donc on peut déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x :

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{5}{2}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   e. $\mathrm{e}^{\ln\frac{5}{2}} = \dfrac{5}{2}$ donc $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{5}{2} - 5\right) + 4 = -\dfrac{25}{4} + 4 = -\dfrac{9}{4} = -2{,}25$
On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbf{R}$:

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{5}{2}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	$-2{,}25$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}$ donc son ordonnée est égale à : $f(x_{\mathrm{A}}) = f\left(\ln\frac{1}{2}\right)$.
$\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$ donc $f\left(\ln\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 5\right) + 4 = \dfrac{7}{4}$
Le coefficient directeur de la droite T est $f'(x_{\mathrm{A}}) = f'\left(\ln\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2 \times \dfrac{1}{2} - 5\right) = -2$.
La droite T a donc pour équation $y = -2\left(x - \ln\frac{1}{2}\right) + \dfrac{7}{4}$.

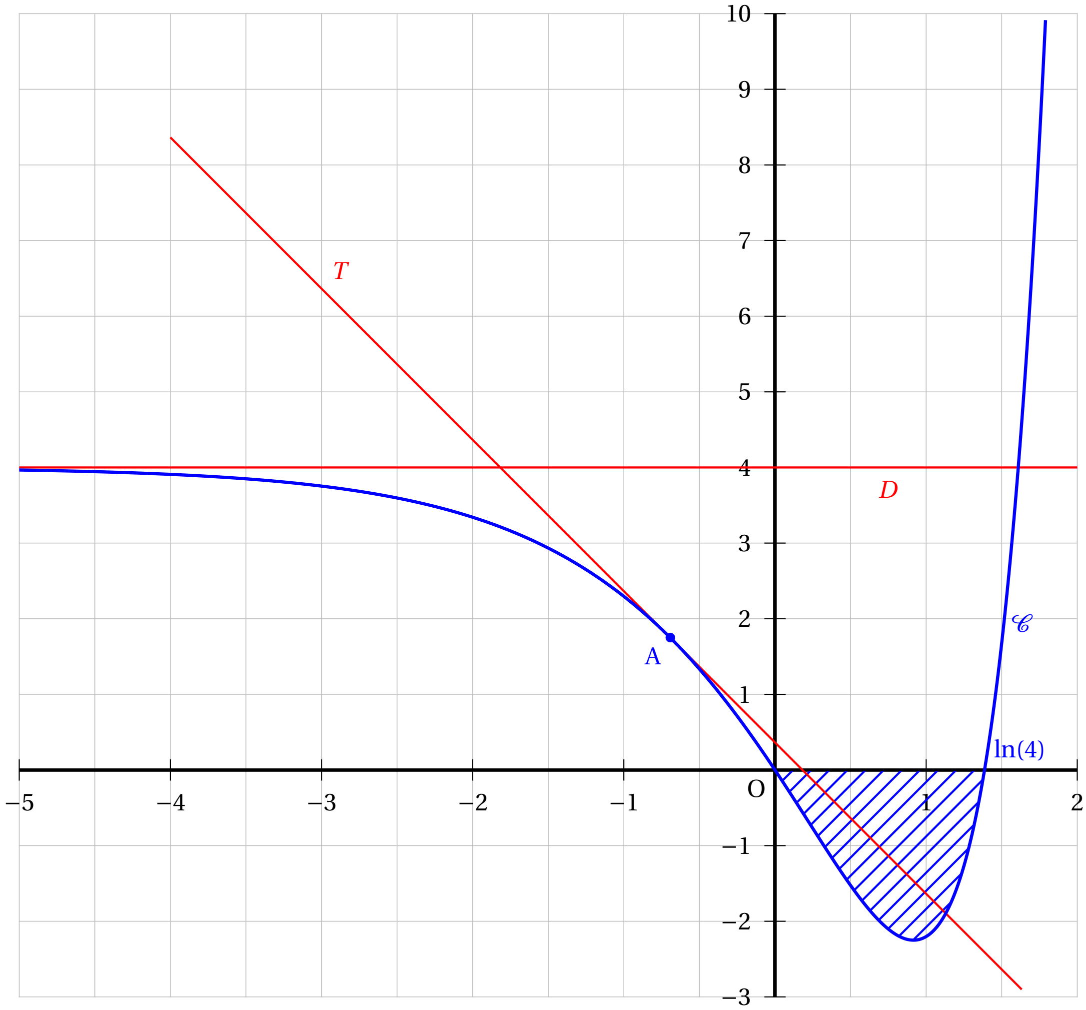
3. **a.** Soit l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$
L'équation admet deux solutions : $X' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $X'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+3}{2} = 4$.

   b. $f(x) = 0 \iff (\mathrm{e}^{x})^2 - 5\mathrm{e}^{x} + 4 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} = 1$ ou $\mathrm{e}^{x} = 4$ d'après la question précédente avec $X = \mathrm{e}^{x}$.
$\mathrm{e}^{x} = 1 \iff x = 0$ et $\mathrm{e}^{x} = 4 \iff x = \ln(4)$
L'équation $f(x) = 0$ a pour solutions $x = 0$ et $x = \ln(4)$.

4. On complète le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-4	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	1,6
$f(x)$	4	3,9	3,3	2,9	2,3	1,3	0	$-1{,}5$	$-2{,}2$	1,7	3,8

5. Figure :



6. a. La fonction f a pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4x$.

b. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln(4)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\ln(4)) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln(4)} - 5\mathrm{e}^{\ln(4)} + 4\ln(4)\right) - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{0} - 5\mathrm{e}^{0} + 0\right)$

$= 8 - 20 + 4\ln(4) - \frac{1}{2} + 5 = 4\ln(4) - \frac{15}{2} \approx -1{,}95$

Remarque

Il n'est pas étonnant que le résultat de l'intégrale soit négatif car la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,;\,\ln(4)]$.

L'aire hachurée sur la figure a pour mesure, en unité d'aire, $-\displaystyle\int_0^{\ln(4)} f(x)\,\mathrm{d}x$.