Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse
Métropole juin 2006

EXERCICE 1 6 points

1. En partant de LA et en augmentant d'une quarte on obtient la note RÉ. Sachant que la fréquence du LA_3 est de 440 Hz, la fréquence du $RÉ_4$ est environ de :

a. 660,0 Hz **b.** $\boxed{587,3\text{ Hz}}$ **c.** 586,7 Hz

En augmentant d'une quarte, on augmente de 5 demi-tons, donc on mulitplie la fréquence par $q^5 = 2^{\frac{5}{12}}$: la fréquence du RÉ est donc de $440 \times 2^{\frac{5}{12}} \approx 587,3$ Hz.

2. Dans cette gamme, le rapport des fréquences correspondant à une quinte juste ascendante est égal à :

a. $\dfrac{3}{2}$ **b.** $\sqrt[7]{2^{12}}$ **c.** $\boxed{2^{\frac{7}{12}}}$

Une quinte juste correspond à 7 demi-tons donc le rapport des fréquences est $q^7 = 2^{\frac{7}{12}}$.

3. Sachant que le rapport des fréquences de deux notes vaut environ 1,498 3 le nombre de demi-tons entre les deux notes est de :

a. 6 **b.** $\boxed{7}$ **c.** 8

Si le rapport des fréquence est environ 1,498 3, le nombre de demi-tons entre les deux notes est donné par l'entier n tel que $q^n = 1,4983$, c'est-à-dire $2^{\frac{n}{12}} = 1,4983$:

$$2^{\frac{n}{12}} = 1,4983 \iff \log\left(2^{\frac{n}{12}}\right) = \log(1,4983) \iff \frac{n}{12}\log(2) = \log(1,4983) \iff \frac{n}{12} = \frac{\log(1,4983)}{\log(2)}$$

$$\iff n = 12\frac{\log(1,4983)}{\log(2)} \iff n \approx 7$$

4. On considère la bande passante 20 à 20 000 Hz d'un appareil sonore.
Sachant que la fréquence du DO_3 est d'environ 262 Hz, le nombre de DO d'octaves différentes pouvant passer dans cet appareil est de :

a. 4 **b.** 7 **c.** $\boxed{10}$

On passe d'un DO au DO de l'octave supérieure en multipliant la fréquence par 2, et on passe au DO de l'octave inférieure en divisant la fréquence par 2 :

note	DO_0	DO_1	DO_2	DO_3	DO_4	DO_5	DO_6	DO_7	DO_8	DO_9
fréquence	33	66	131	262	524	1 048	2 096	4 192	8 384	16 768

5. Si l'on additionne une fonction sinusoïdale de fréquence 110 Hz à une fonction sinusoïdale de fréquence 220 Hz, la fonction somme est :

a. Non périodique **b.** Périodique de fréquence 330 Hz **c.** $\boxed{\text{Périodique de fréquence 110 Hz}}$

Une fonction f périodique de fréquence 110 Hz a une période de $\dfrac{1}{110}$ donc, pour tout entier relatif k, $f\left(x+\dfrac{k}{110}\right)=f(x)$. Une fonction g périodique de fréquence 220 Hz a une période de $\dfrac{1}{220}$ donc, pour tout entier relatif k, $g\left(x+\dfrac{k}{220}\right)=g(x)$. En particulier, $g\left(x+\dfrac{2}{220}\right)=g(x)$ autrement dit $g\left(x+\dfrac{1}{110}\right)=g(x)$.

On déduit que, pour tout x, $(f+g)\left(x+\dfrac{1}{110}\right)=f\left(x+\dfrac{1}{110}\right)+g\left(x+\dfrac{1}{110}\right)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$.

Donc la fonction $f+g$ est périodique de période $\dfrac{1}{110}$ donc de fréquence 110 Hz.

6. En partant de RÉ et en augmentant de n quartes on obtient la note MI.
L'entier n est tel que :

a. $\boxed{5n \equiv 2 \quad (\text{modulo } 12)}$ **b.** $2n \equiv 12 \quad (\text{modulo } 5)$ **c.** $\log(5n) = \log 2 + k \log 12$, où k est un entier relatif

Une quarte correspond à 5 demi-tons et il y a deux demi-tons entre un RÉ et un MI puisqu'il y a le RÉ# entre ces deux notes. Enfin tous les 12 demi-tons, on retombe sur la note RÉ.
Il faut donc que $5n$ soit égal à 2 augmenté d'un multiple de 12, donc que $5n \equiv 2 \quad (\text{modulo } 12)$.

EXERCICE 2 — 7 points

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-1\,;\,4]$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 6 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. $f'(x)=\dfrac{2x\times \mathrm{e}^x - x^2\times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{x\mathrm{e}^x(2-x)}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{x(2-x)}{\mathrm{e}^x}$

b. On étudie le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[-1\,;\,4]$:

x	-1		0		2		4
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)=\dfrac{x(2-x)}{\mathrm{e}^x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. $f(-1)=\dfrac{(-1)^2}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}$; $f(0)=0$; $f(2)=4\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}54$ et $f(4)=16\mathrm{e}^{-4}\approx 0{,}29$

On dresse le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;\,4]$:

x	-1		0		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	$16\,\mathrm{e}^{-4}$

2. **a.** La tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1 a pour équation : $y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$.

$f(1) = \dfrac{1^2}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $f'(1) = \dfrac{1(2-1)}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

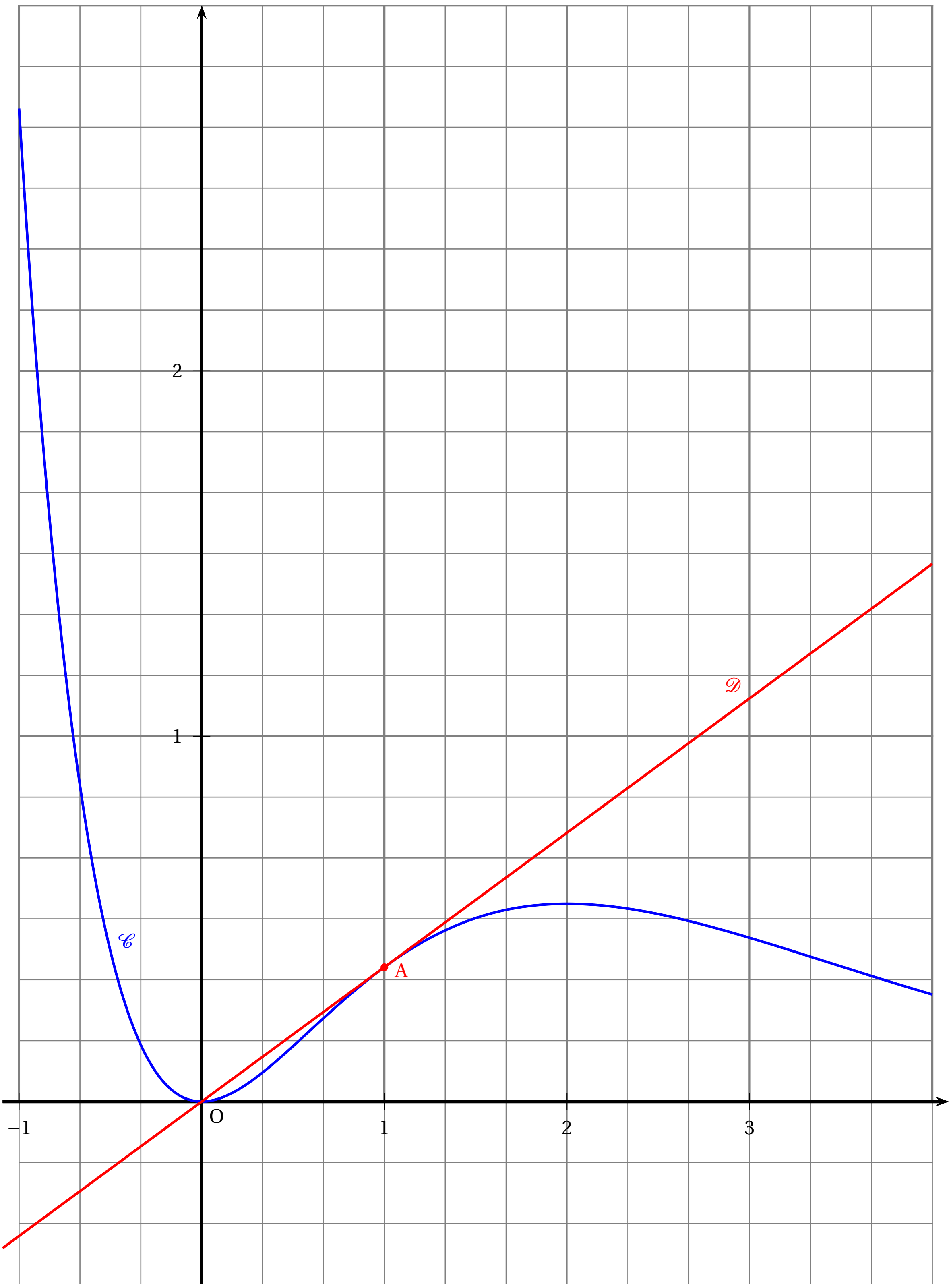
$\mathscr{D}$ a pour équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-1) + \dfrac{1}{\mathrm{e}} \iff y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x - \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} \iff y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x$.

b. La droite $\mathscr{D}$ passe par le point A. Si $x = 0$, $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times 0 = 0$ donc la droite $\mathscr{D}$ passe par le point O. Donc la droite $\mathscr{D}$ est confondue avec la droite (OA).

3. On remplit le tableau de valeurs suivant :

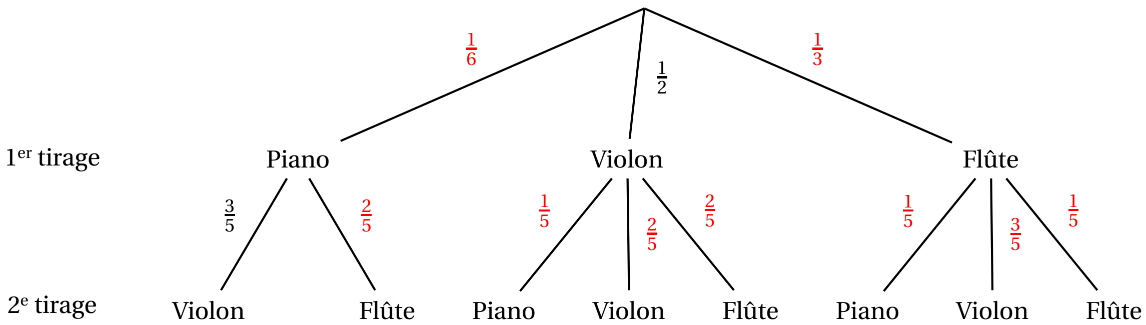
x	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	0,25	0,5	1	2	3	4
$f(x)$	2,72	0,41	0,08	0	0,05	0,15	0,37	0,54	0,45	0,29

4. On construit, dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$.


2
1
O
−1
1
2
3
A
$\mathscr{C}$
$\mathscr{D}$

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 7 points

1. On complète l'arbre de probabilités suivant :



2. On note respectivement P_1, V_1 et F_1 les événements « le musicien choisi au 1^er^ tirage est pianiste », « le musicien choisi au 1^er^ tirage est violoniste »et « le musicien choisi au 1^er^ tirage est flûtiste ».
On définit de même P_2 ; V_2 et F_2 les événements correspondant pour le 2^e^ tirage.

- On appelle A l'événement : « Les deux musiciens tirés au sort sont des violonistes ».
$P(A) = P(V_1 \cap V_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{5}$
- On appelle B l'événement : « Les deux musiciens tirés au sort peuvent interpréter un duo violon-flûte ».
$P(B) = P(V_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap V_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$
- On appelle C l'événement : « Les deux musiciens tirés au sort jouent du même instrument ».
$P(C) = P(P_1 \cap P_2) + P(V_1 \cap V_2) + P(F_1 \cap F_2) == 0 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5}$
- On appelle D l'événement : « Le deuxième musicien tiré au sort joue du violon ».
$P(D) = P(P_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap V_2) + P(F_1 \cap V_2) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

3. Sachant que le deuxième musicien tiré au sort joue du violon, la probabilité pour que le premier musicien tiré au sort joue également du violon est : $P_{V_2}(V_1) = \dfrac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_2)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{2}{1} = \dfrac{2}{5}$.

EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) 7 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ où l'unité graphique est de 4 cm. On considère le point M_1 d'affixe $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et le point M_2 d'affixe $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

1. $z_1 \times z_2 = (1 + \mathrm{i})\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3} - \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = \left(\sqrt{3} + 1\right) + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

2. a. Voir figure.

b. $\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2}{2} + \mathrm{i}\dfrac{2}{2} = 1 + \mathrm{i}$.

c. $|z_1| = |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$

Le nombre z_1 a pour argument le réel θ tel que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de z_1.

3. **a.** $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}\right)=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2\times\dfrac{1}{2}\text{i}=\sqrt{3}-\text{i}$.

b. $|z_2|=\left|\sqrt{3}-\text{i}\right|=\sqrt{3+1}=2$

Le nombre z_2 a pour argument le réel θ' tel que $\cos\theta'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta'=-\dfrac{1}{2}$.

Donc $-\dfrac{\pi}{6}$ est un argument de z_2.

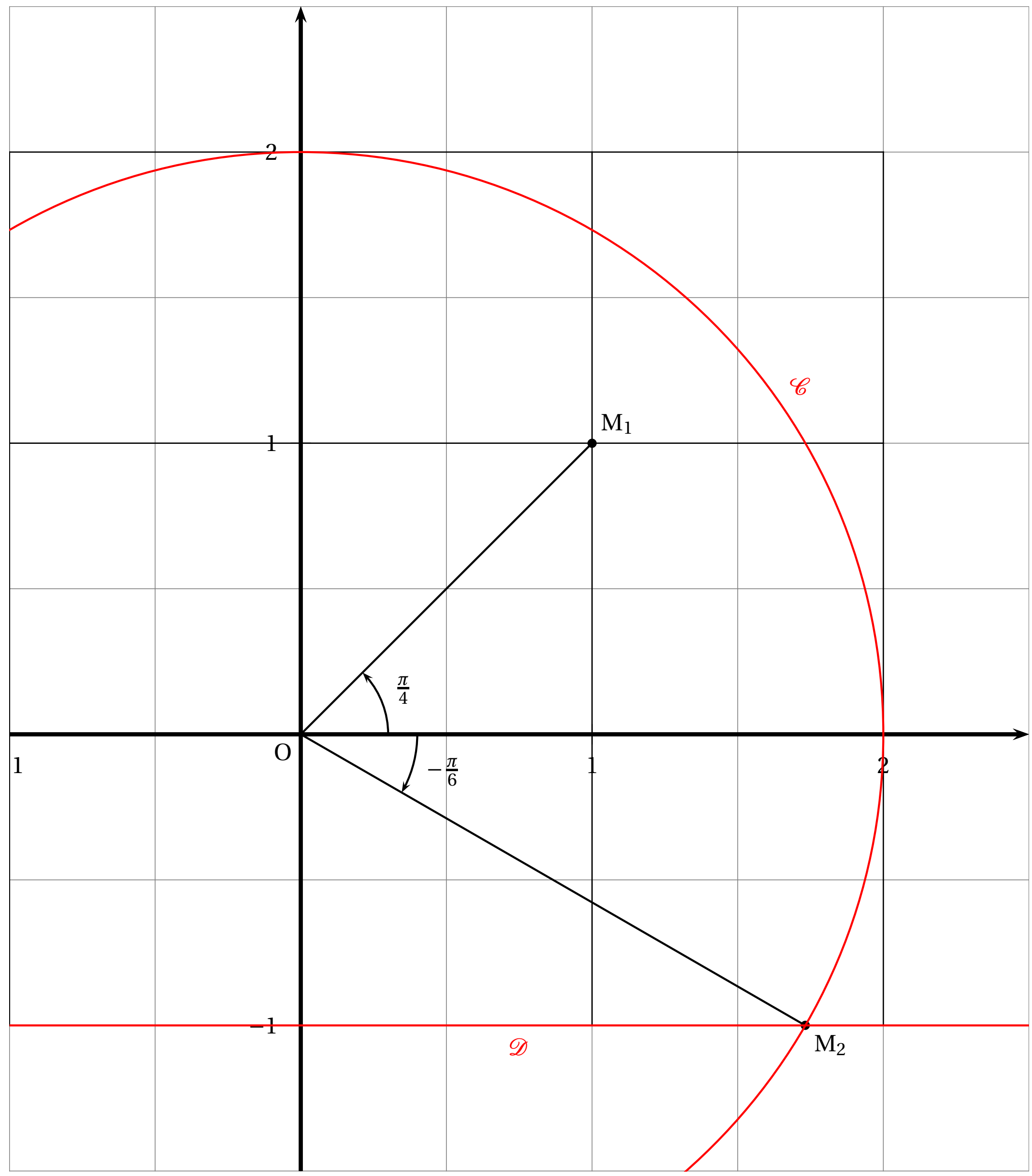
c. Le module de z_2 est égal à 2 donc le point M_2 est situé sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.
Le nombre z_2 a pour partie imaginaire -1 donc le point M_2 est situé sur la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-1$.
La partie réelle du nombre z_2 est égale à $\sqrt{3}$ donc est positive, le point M_2 est donc le point d'abscisse positive situé à l'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
Voir construction sur la figure.

4. **a.** $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|=\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$
$\arg(z_1\times z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)=\dfrac{\pi}{4}+\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{12}$ à 2π près.

b. Donc $z_1\times z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+\text{i}.\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+\text{i}.2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

c. On a d'une part $z_1\times z_2=\left(\sqrt{3}+1\right)+\text{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$ et d'autre part $z_1\times z_2=2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+\text{i}.2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

En identifiant les parties réelles des deux expressions de $z_1\times z_2$, on a $\sqrt{3}+1=2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.


2
1
−1
1
O
1
2
$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{6}$
M_1
M_2
$\mathscr{C}$
$\mathscr{D}$