∽ Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse ∾ Métropole juin 2008

EXERCICE 1 — 5 points

1. Dans la division euclidienne de 2 008 par 12 :

   a. Le reste est égal à 8. **b.** $\boxed{\text{Le reste est égal à 4.}}$ **c.** Le reste est égal à 0,33.

   En effet : $2008 = 12 \times 167 + 4$.

2. L'entier 143 est congru à l'entier -18

   a. modulo 5 **b.** modulo 2 **c.** $\boxed{\text{modulo 7}}$

   $143 + 18 = 161 \iff 143 + 18 = 7 \times 23 \iff 143 = -18 + 7 \times 23$ donc $143 \equiv -18 \pmod{7}$.

3. Soit un entier x. Si $x \equiv 2 \pmod{5}$, alors :

   a. $\boxed{x^5 \equiv x \pmod{5}}$ **b.** $x^5 \equiv 1 \pmod{5}$ **c.** $x^5 \equiv 0 \pmod{5}$

   $x \equiv 2 \pmod{5}$ donc $x^5 \equiv 2^5 \pmod{5} \iff x^5 \equiv 32 \pmod{5} \iff x^5 \equiv 2 \pmod{5}$ donc $x^5 \equiv x \pmod{5}$.

4. En ajoutant cinq quintes à la note LA on obtient la note SOL# car :

   a. $8 + 5 \times 7 \equiv 9$ (modulo 12) **b.** $9 + 5 \times 8 \equiv 7$ (modulo 12) **c.** $\boxed{9 + 5 \times 7 \equiv 8 \text{ (modulo 12)}}$

   Ajouter cinq quintes revient à ajouter 5×7 demi-tons. La note LA correspond au nombre 9 modulo 12 ; il faut donc chercher le reste dans la division par 12 de $9 + 5 \times 7 = 44$ et $44 = 3 \times 12 + 8 \equiv 8 \pmod{12}$.

5. Sachant qu'en ajoutant n quintes à la note RÉ on obtient la note FA, l'entier n est tel que :

   a. $2 + n \equiv 5$ (modulo 12) **b.** $\boxed{7n \equiv 3 \text{ (modulo 12)}}$ **c.** $2 + 7n \equiv 6$ (modulo 12)

   La note RÉ correspond au nombre 2 modulo 12 ; on ajoute n quintes donc $7n$ demi-tons ce qui donnc $2 + 7n$ modulo 12. Comme on obtient un FA (nombre 5), il faut que : $2 + 7n \equiv 5 \pmod{12}$, autrement dit que $7n \equiv 3 \pmod{12}$.

EXERCICE 2 — 8 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $\text{I} = [0,5\,;\ 8]$ par : $f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x$.

1. $f'(x) = -\dfrac{1}{x} \times \ln x + (2 - \ln x) \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{2 - 2\ln x}{x} = \dfrac{2}{x}(1 - \ln x)$

2. **a.** $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \text{e} = x \iff x = \text{e}$

   $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \text{e} > x \iff x < \text{e}$

   b. $f(0,5) \approx -1,87$; $f(\text{e}) = 1$ et $f(8) \approx -0,17$

   Sur l'intervalle I, $\dfrac{2}{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$.

   On en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f (voir page suivante).

x	0,5		e		8
$1-\ln x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-1{,}87$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-0{,}17$

3. **a.** On résout dans I l'équation $f(x)=0$:

$f(x)=0 \iff (2-\ln x)\times\ln x=0 \iff 2-\ln x=0$ ou $\ln x=0 \iff \mathrm{e}^2=x$ ou $x=1$

L'équation $f(x)=0$ a donc deux solutions $x=1$ et $x=\mathrm{e}^2$.

b. Cela veut dire que la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f passe par les deux points de coordonnées $(1~;~0)$ et $(\mathrm{e}^2~;~0)$.

4. La tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1 est $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

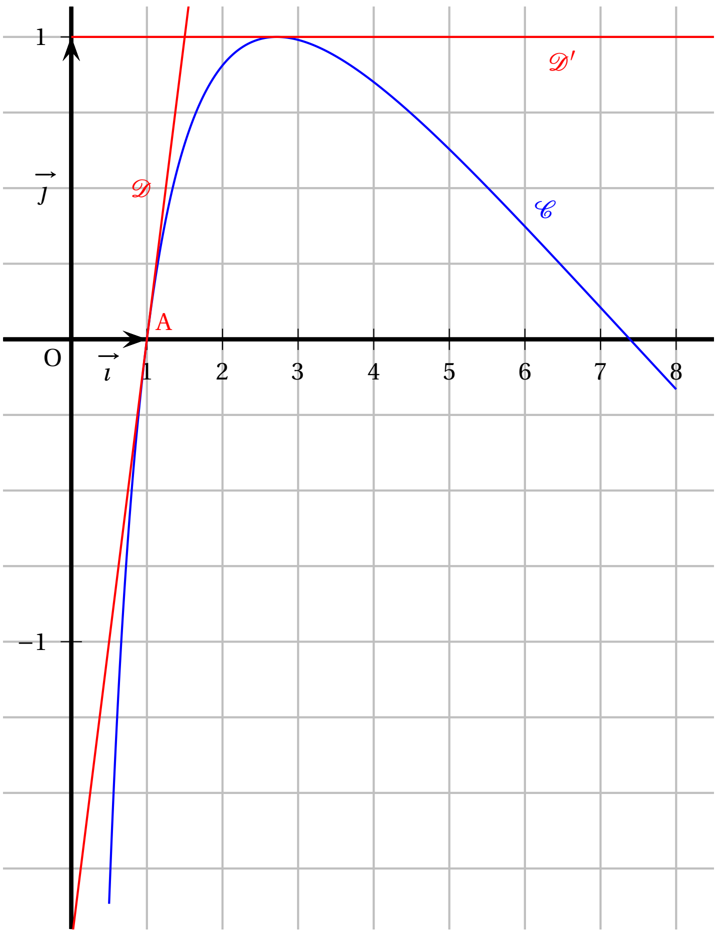
$f(1)=0$ et $f'(1)=\dfrac{2}{1}(1-\ln 1)=2$; l'équation de la droite est donc $y=2(x-1)+0$ soit $y=2x-2$.

5. On complète le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	$-1{,}82$	0	0,91	0,99	0,85	0,63	0,37	0,11	- 0,17

6. En $x=\mathrm{e}$, la fonction atteint le maximum égal à 1 et sa dérivée est nulle ; donc la tangente en ce point d'abscisse e est horizontale.

On construit la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ ainsi que la tangente $\mathscr{D}'$ au point d'abscisse e :



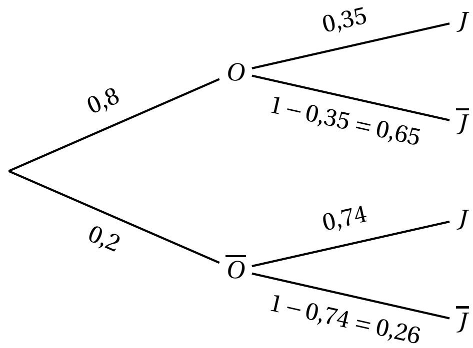
EXERCICE 3 — Enseignement obligatoire (au choix) — 7 points

1. **a.** D'après le texte, 80 % des enfants ont un ordinateur à la maison, donc $P(O) = 0{,}8$.
On en déduit que : $P(\overline{O}) = 1 - P(O) = 0{,}2$.

b. D'après le texte, 74 % des enfants qui n'ont pas d'ordinateur à la maison jouent d'un instrument de musique, donc $P_{\overline{O}}(J) = 0{,}74$.

2. D'après le texte, 28 % des enfants ont un ordinateur à la maison et jouent d'un instrument de musique, donc $P(O \cap J) = 0{,}28$.
Or $P(O \cap J) = P(O) \times P_O(J)$ et $P(O) = 0{,}8$ donc $0{,}28 = 0{,}8 \times P_O(J)$ donc $P_O(J) = \dfrac{0{,}28}{0{,}8} = 0{,}35$.

3. On construit l'arbre de probabilité traduisant la situation :



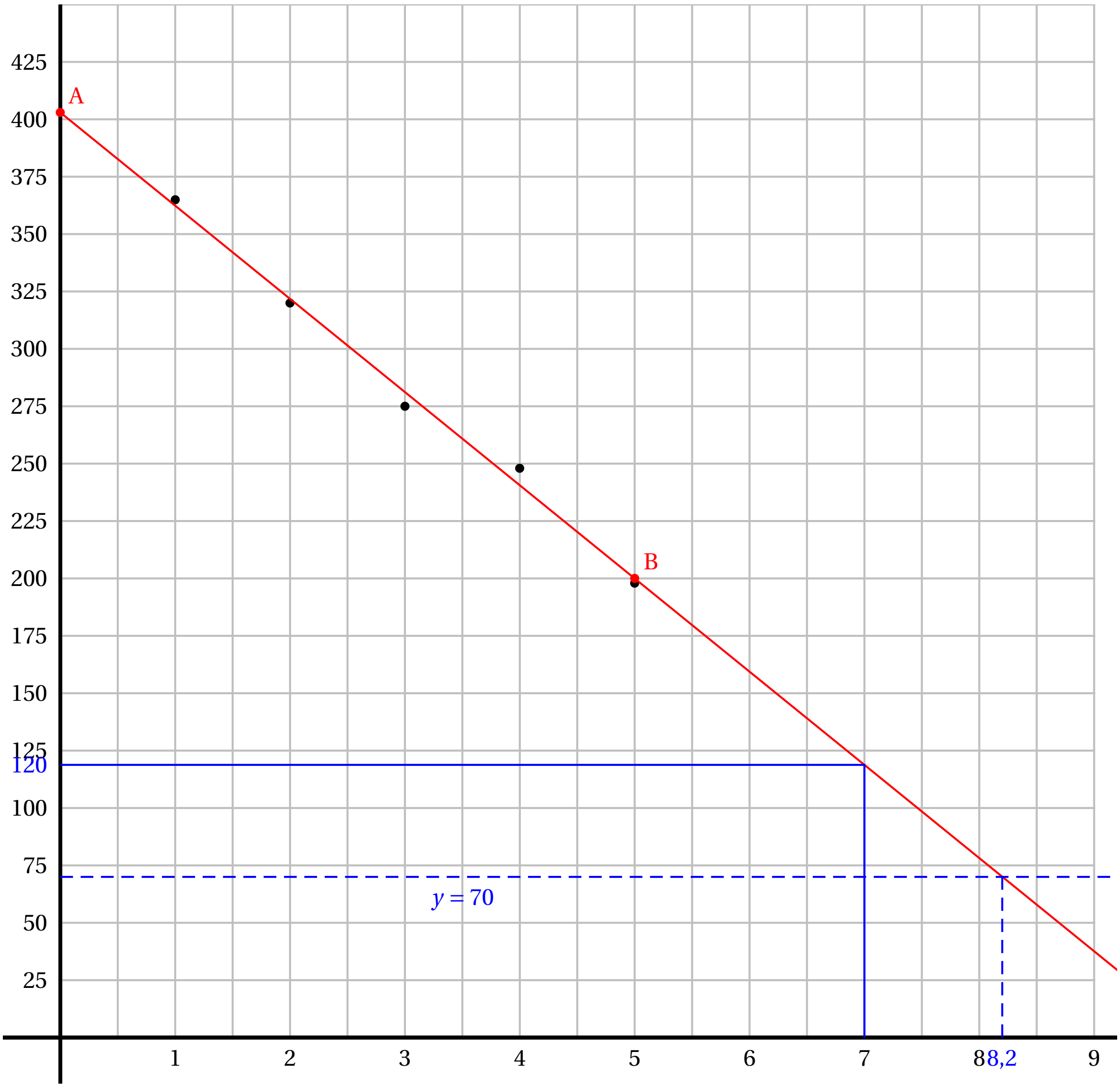
4. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(J) = P(O \cap J) + P(\overline{O} \cap J) = 0{,}8 \times 0{,}35 + 0{,}2 \times 0{,}74 = 0{,}428$.
5. La probabilité de l'évènement « l'enfant a un ordinateur à la maison » sachant qu'il joue d'un instrument de musique est : $P_J(O) = \dfrac{P(O \cap J)}{P(J)} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}35}{0{,}428} \approx 0{,}654$.

EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) 7 points

Plusieurs représentations d'un même spectacle sont données dans une salle de 400 places. On a relevé le nombre de spectateurs à chacune des cinq premières représentations.
Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant où x_i désigne le rang de la représentation et y_i désigne le nombre de spectateurs correspondant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	365	320	275	248	198

1. **a.** On représente le nuage de points dans un repère (voir page suivante).
   b. Les points du nuage sont presque alignés donc un ajustement affine se justifie.
2. **a.** D'après la calculatrice, l'équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de y en x du nuage, obtenue par la méthode des moindres carrés est : $y = -40{,}6x + 403$.
   b. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = -40{,}6x + 403$.
   Pour $x = 0$, on trouve $y = 403$ donc la droite passe par le point A de coordonnées (0 ; 403).
   Pour $x = 5$, on trouve $y = 200$ donc la droite passe par le point B de coordonnées (5 ; 200).
   Voir figure.
3. **a.** On trouve graphiquement environ 120 comme estimation du nombre de spectateurs la septième année (voir figure).
   b. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = -40{,}6x + 403$.
   Pour $x = 7$, on trouve $y = 118{,}8$; on peut donc estimer à 119 le nombre de spectateurs la septième année.
4. Les organisateurs du spectacle estiment qu'une représentation est rentable s'il y a au moins 70 spectateurs.
   a. On doit trouver x tel que : $-40{,}6x + 403 \geqslant 70 \iff 333 \geqslant 40{,}6x \iff \dfrac{333}{40{,}6} \geqslant x \iff x \leqslant \dfrac{333}{40{,}6}$
   $\dfrac{333}{40{,}6} \approx 8{,}2$ donc c'est à partir de la 9^e^ représentation que le seuil de rentabilité ne sera pas atteint.
   b. Voir graphique.


425
400
375
350
325
300
275
250
225
200
175
150
125
120
100
75
50
25
A
B
y = 70
1
2
3
4
5
6
7
8
8,2
9