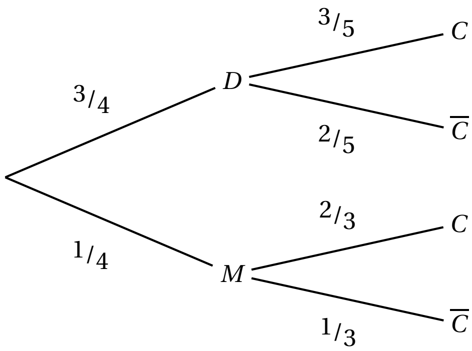
Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse
∽ Métropole juin 2009 ∾

EXERCICE 1 — 5 points

On construit un arbre de probabilités correspondant au problème posé :



1. La probabilité que la question posée à Claire porte sur le thème « Musique » est :

a. $\dfrac{1}{2}$ **b.** $\boxed{\dfrac{1}{4}}$ **c.** $\dfrac{2}{3}$

D'après le texte.

2. La fraction $\dfrac{2}{3}$ de l'énoncé est égale à la probabilité :

a. $P(C \cap M)$ **b.** $P_{\mathrm{C}}(M)$ **c.** $\boxed{P_M(C)}$

Voir arbre.

3. La probabilité que la question posée porte sur le thème « Musique » et que Claire y réponde correctement est :

a. $\boxed{\dfrac{1}{6}}$ **b.** $\dfrac{3}{4}$ **c.** $\dfrac{1}{2}$

$P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$

4. La probabilité que Claire ne réponde pas correctement à la question posée

a. $\dfrac{37}{60}$ **b.** $\boxed{\dfrac{23}{60}}$ **c.** $\dfrac{1}{12}$

D'après la formule des probabilités totales : $P(\overline{C}) = P(D \cap \overline{C}) + P(M \cap \overline{C}) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{23}{60}$

5. Sachant que Claire n'a pas répondu correctement à la question posée, la probabilité pour que la question posée porte sur le thème « Musique » est :

a. $\boxed{\dfrac{5}{23}}$ **b.** $\dfrac{1}{12}$ **c.** $\dfrac{1}{3}$

$$P_{\overline{C}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{23}{60}} = \frac{1}{12} \times \frac{60}{23} = \frac{5}{23}$$

EXERCICE 2 — 8 points

1. On ajoute une quinte juste à la note LA_3.

a. Ajouter une quinte juste, revient à ajouter 7 demi-tons :

$$\underbrace{LA_3 \quad LA\#_3 \quad SI_3 \quad DO_4 \quad DO\#_4 \quad RÉ_4 \quad RÉ\#_4 \quad MI_4}_{+7}$$

Donc on obtient la note MI_4.

b. On monte de 7 demi-tons et la fréquence du LA_3 est de 440 Hz, donc la fréquence du MI_4 est :
$440 \times q^7 = 440 \times 2^{\frac{7}{12}} \approx 659$ Hz.

2. En ajoutant une quinte juste à une note, on obtient la note LA_3.

a. On retranche 7 demi-tons à la note LA_3 pour obtenir la note dont on est parti :

$$DO\#_3 \quad \underbrace{RÉ_3 \quad RÉ\#_3 \quad MI_3 \quad FA_3 \quad FA\#_3 \quad SOL_3 \quad SOL\#_3 \quad LA_3}_{-7}$$

On est parti du $RÉ_3$.

b. Le $RÉ_3$ est situé 7 demi-tons en dessous du LA_3 donc sa fréquence est : $\dfrac{440}{q^7} = \dfrac{440}{2^{\frac{7}{12}}} \approx 294$ Hz.

3. Le rapport de fréquences f_1 et f_2, exprimées en hertz, de deux notes est de l'ordre de 2,378 4.
On désigne par n le nombre de demi-tons qui séparent les deux notes.

a. On suppose $f_1 < f_2$. Il y a n demi-tons qui séparent la note de fréquence f_1 de la note de fréquence f_2 donc on cherche n tel que : $f_2 = f_1 \times q^n$ ce qui équivaut à $f_2 = f_1 \times 2^{\frac{n}{12}}$ ou encore $\dfrac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{n}{12}}$.

On sait que $\dfrac{f_2}{f_1} = 2{,}3784$ donc on cherche n tel que $2^{\frac{n}{12}} = 2{,}3784$.

b. $2^{\frac{n}{12}} = 2{,}3784 \iff \log\left(2^{\frac{n}{12}}\right) = \log(2{,}3784) \iff \dfrac{n}{12}\log(2) = \log(2{,}3784) \iff n = 12 \times \dfrac{\log(2{,}3784)}{\log(2)}$

On trouve $n = 15$; il y a donc 15 demi-tons qui séparent les deux notes de fréquences f_1 et f_2.

4. Un son a une intensité sonore I_1, égale à $3,7 \times 10^{-6}\text{W.m}^{-2}$.

Son niveau sonore est : $L(I_1) = 10\log\left(\dfrac{I_1}{I_0}\right) = 10\log\left(\dfrac{3,7 \times 10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 10\log\left(3,7 \times 10^5\right) \approx 56$ dB.

5. Un son d'intensité sonore I_2 a un niveau sonore $L(I_2)$ égal à 45 dB.
On cherche donc l'intensité I_2 telle que $L(I_2) = 45$:

$$L(I_2) = 45 \iff 10\log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) = 45 \iff \log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right) = 4,5 \iff \log\left(I_2 \times 10^{12}\right) = 4,5 \iff I_2 \times 10^{12} = 10^{4,5}$$

$$\iff I_2 = \frac{10^{4,5}}{10^{12}} \iff I_2 = 10^{-7,5} \iff I_2 \approx 3 \times 10^{-8}\ \text{W.m}^{-2}$$

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 7 points

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle I = [1 ; 9], par : $f(x) = 10 \times \dfrac{\ln(x)-1}{x}$.

1. $f'(x) = 10 \times \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (\ln(x)-1) \times 1}{x^2} = 10 \times \dfrac{1-\ln(x)+1}{x^2} = 10 \times \dfrac{2-\ln(x)}{x^2}$

2. **a.** $2-\ln(x) = 0 \iff 2 = \ln(x) \iff e^2 = x \iff x = e^2$
   $2-\ln(x) > 0 \iff 2 > \ln(x) \iff e^2 > x \iff x < e^2$

   b. On en déduit le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I :

x	1		e^2		9
$2-\ln(x)$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   $f(1) = 10 \times \dfrac{\ln(1)-1}{1} = -10$; $f(e^2) = 10 \times \dfrac{\ln(e^2)-1}{e^2} = 10 \times \dfrac{2-1}{e^2} = 10e^{-2} \approx 1,35$;
   $f(9) = 10 \times \dfrac{\ln(9)-1}{9} \approx 1,33$

   On dresse le tableau de variations de la fonction f sur I :

x	1	e^2	9
$f(x)$	-10 $\nearrow$	$10e^{-2}$	$\searrow$ $\dfrac{10}{9}(\ln(9)-1)$

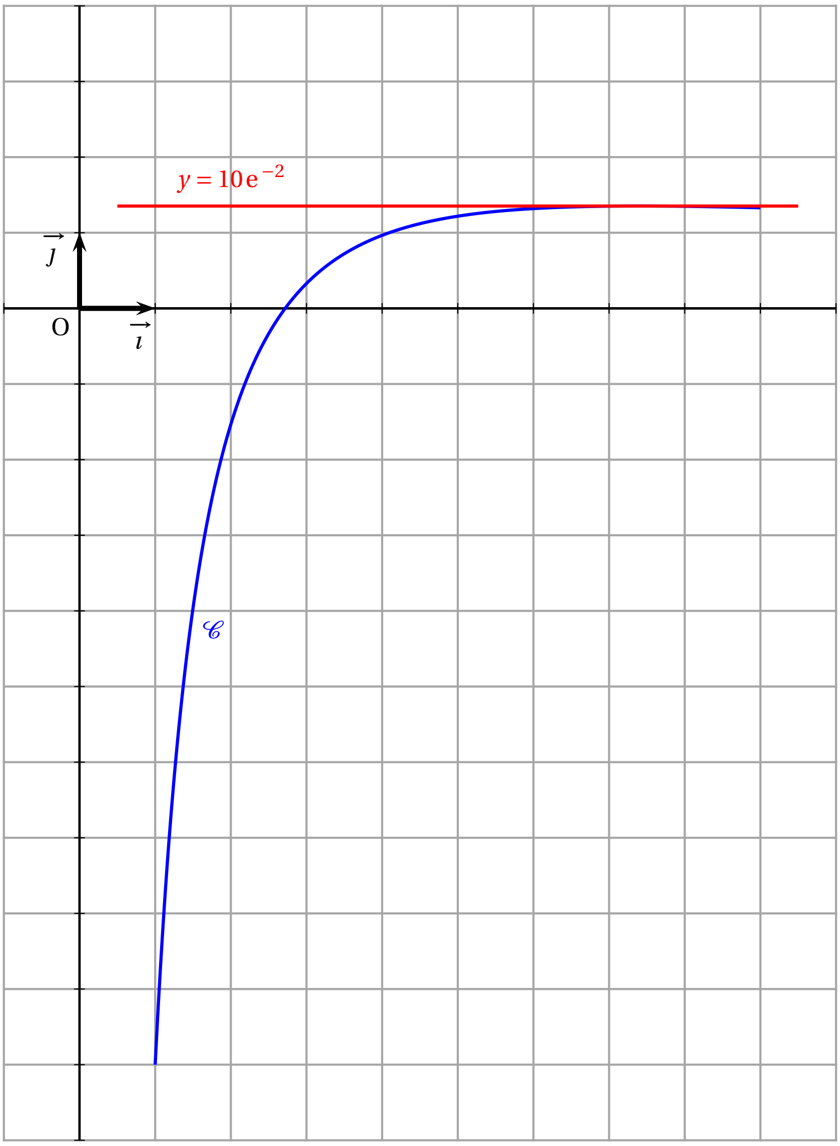
3. **a.** On résout, dans l'intervalle I, l'équation $f(x) = 0$:
   $f(x) = 0 \iff 10 \times \dfrac{\ln(x)-1}{x} = 0 \iff \ln(x)-1 = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$

   b. Donc la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f passe par le point de coordonnées $(e\ ;\ 0)$.

4. On complète le tableau de valeurs suivant :

x	1	2	e	3	4	5	7	9
$f(x)$	-10	$-1,53$	0	0,33	0,97	1,22	1,35	1,33

5. La tangente parallèle à l'axe des abscisses passe par le point de la courbe en lequel la dérivée s'annule, donc par le point de coordonnées $\left(e^2\ ;\ 10e^{-2}\right)$; cette droite a donc pour équation $y = 10e^{-2}$.
   On construit, dans le repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la tangente parallèle à l'axe des abscisses :



EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) 7 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ où l'unité graphique est 2 cm.

1. On considère le point M_1 d'affixe $z_1 = 1 - \mathrm{i}$.

a. Voir figure.

b. $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ donc $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

On cherche le réel α tel que : $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près.

Le nombre complexe z_1 a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $-\dfrac{\pi}{4}$.

2. On considère le nombre complexe z_2 de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$ et M_2 le point d'affixe z_2.

a. Le module de z_2 est égal à 2 donc le point M_2 se trouve sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.
On place le point A d'affixe 2 et on trace l'arc de cercle de centre A et de rayon 2 ; il coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points et le point d'ordonnée positive est le point M_2.
Voir figure.

b. $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \text{i}\sqrt{3}$

3. a. $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1+\text{i}\sqrt{3}}{1-\text{i}} = \dfrac{\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)(1+\text{i})}{(1-\text{i})(1+\text{i})} = \dfrac{1+\text{i}\sqrt{3}+\text{i}-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

b. D'après le cours : $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

et : $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \arg(z_2) - \arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{12}$ à 2π près.

c. D'après les questions précédentes : $\dfrac{z_2}{z_1} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + \text{i}\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
En égalisant les parties réelles et les parties imaginaires on trouve :
$\sqrt{2}\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ donc $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ donc $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.