Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse Métropole juin 2012

EXERCICE 1 — 6 points

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}\ ;\ 10\right]$ par $g(x) = \ln x - 1$.

1. $g(x) = 0 \iff \ln x - 1 = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = \mathrm{e}$ et $\mathrm{e} \in \mathrm{I}$.
2. $g(x) \geqslant 0 \iff \ln x - 1 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant 1 \iff x \geqslant \mathrm{e}$; l'ensemble solution sur I est $[\mathrm{e}\ ;\ 10]$.

   Donc sur l'intervalle I :
   - $g(x) < 0$ sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \mathrm{e}\right[$;
   - $g(x) = 0$ pour $x = \mathrm{e}$;
   - $g(x) > 0$ sur $]\mathrm{e}\ ;\ 10]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = x(\ln x - 2)$.

1. $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}(\ln \mathrm{e} - 2) = \mathrm{e}(1-2) = -\mathrm{e}$
2. $f'(x) = 1 \times (\ln x - 2) + x \times \left(\frac{1}{x} - 0\right) = \ln x - 2 + 1 = \ln x - 1 = g(x)$
3. On en déduit le signe de $f'(x)$:
   - $f'(x) < 0$ sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \mathrm{e}\right[$;
   - $f'(x) = 0$ pour $x = \mathrm{e}$;
   - $f'(x) > 0$ sur $]\mathrm{e}\ ;\ 10]$.

   $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\ln \frac{1}{2} - 2}{2}$ et $f(10) = 10(\ln 10 - 2)$

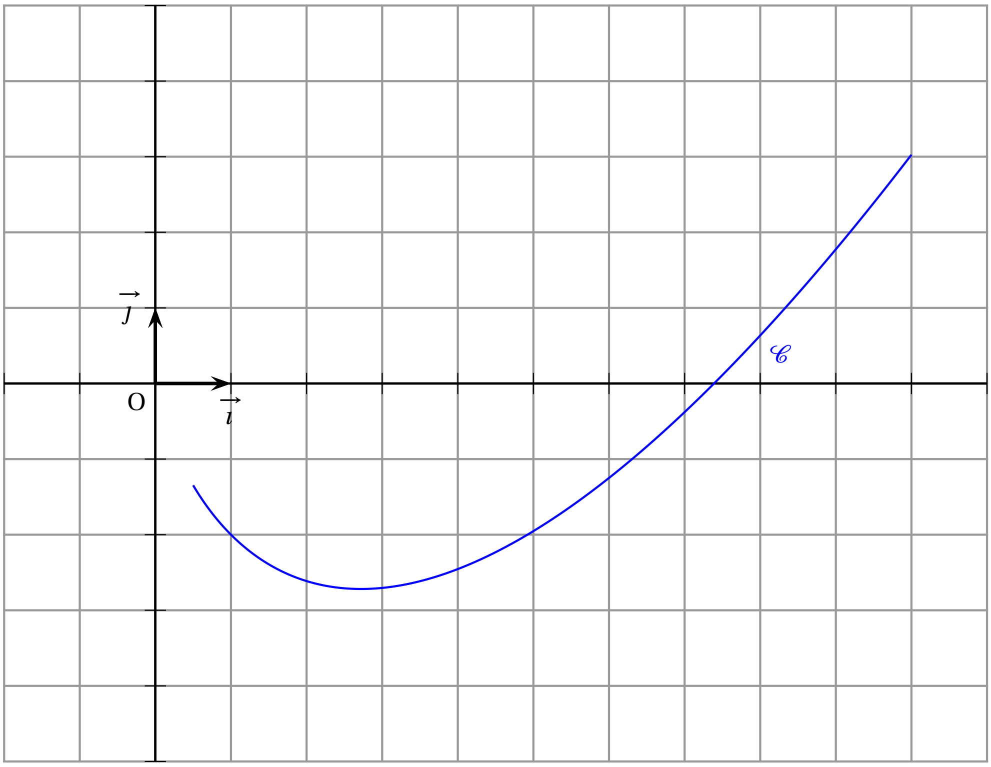
x	$\frac{1}{2}$		e		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{\ln\frac{1}{2}-2}{2}$	$\searrow$	$-\mathrm{e}$	$\nearrow$	$10(\ln 10 - 2)$

4. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm.

   a. On complète le tableau suivant :

x	0,5	1	2	e	3,5	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	$-1,35$	-2	$-2,61$	$-2,72$	$-2,62$	$-2,46$	$-1,95$	$-1,25$	$-0,38$	$0,64$	$1,78$	$3,03$

   b. On trace la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$:



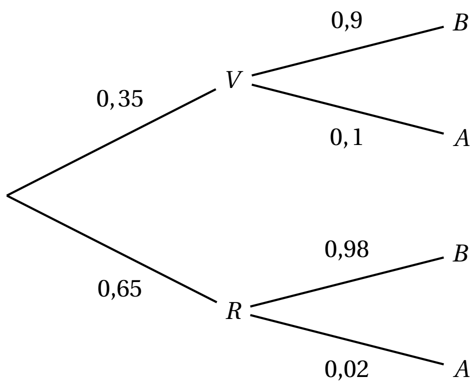
EXERCICE 2 — 7 points

1. **a.** D'après l'énoncé, la marque est verte dans 35 % des cas donc c'est l'événement V qui a une probabilité de 0,35.

   b. D'après l'énoncé, si le ticket porte une marque rouge, le client remporte un paquet de bonbons dans 98 % des cas donc la probabilité $p_R(B)$ que le client gagne des bonbons sachant que son ticket est rouge est $0,98$.

2. **a.** $p_V(A) = 1 - p_V(B) = 1 - 0,9 = 0,1$

   b. On complète l'arbre de probabilités modélisant la situation étudiée :



3. L'événement $V \cap A$ est « le client a eu un ticket vert et a gagné un bon d'achat de 150 € ».
D'après l'arbre : $p(V \cap A) = p(V) \times p_V(A) = 0,35 \times 0,1 = 0,035$.
4. D'après la formule des probabilités totales :
$p(A) = p(V \cap A) + p(R \cap A) = 0,035 + 0,65 \times 0,02 = 0,35 + 0,013 = 0,048$.
5. On sait que le client a gagné un bon d'achat de 150 €.
La probabilité qu'il ait eu un ticket portant une marge rouge est : $p_A(R) = \dfrac{p(R \cap A)}{p(A)} = \dfrac{0,013}{0,048} \approx 0,27$.

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 7 points

1. À partir du LA_3 on monte de 17 demi-tons.
   a. Si on monte de 12 demi-tons, on passe du LA de l'octave 3 au LA de l'octave 4. Puis on monte encore de 5 demi-tons, ce qui donne le RÉ de l'octave 5.

$$\dots \quad \underbrace{\text{LA}_3 \quad \dots \quad \dots \quad}_{+12} \underbrace{\text{LA}_4 \quad \text{LA\#}_4 \quad \text{SI}_4 \quad \text{DO}_5 \quad \text{DO\#}_5 \quad}_{+5} \text{RÉ}_5 \quad \dots$$

   b. La suite des fréquences est géométrique de raison q avec $q = 2^{\frac{1}{12}}$; la fréquence obtenue est donc $440 \times q^{17} = 440 \times 2^{\frac{17}{12}} \approx 1\,174,7$ Hz.
   c. La différence de hauteur de ces notes est donnée par
$1\,000 \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right) = 1\,000 \log\left(\dfrac{440 \times 2^{\frac{17}{12}}}{440}\right) = 1\,000 \log\left(2^{\frac{17}{12}}\right) = 1\,000 \times \dfrac{17}{12} \log(2) \approx 426$ savarts.
2. À partir du LA_3, on monte de n quintes, (où n désigne un nombre entier) et on obtient la note DO.
   a. Monter du LA au DO de l'octave du dessus, c'est monter de 3 demi-tons. Pour atteindre la note DO suivante, il faut monter de $3 + 12$ demi-tons, puis de $3 + 2 \times 12$ pour le DO d'après, etc.
   Il faut donc monter de $3 + 12k$ demi-tons où k est un entier naturel.
   On doit donc avoir $7n = 3 + 12k$ ce qui équivaut à $7n \equiv 3$ modulo 12.
   b. On complète le tableau suivant

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$7n$ modulo 12	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5

   c. D'après le tableau de congruences, pour $n = 9$, $7n$ est congru à 3 modulo 12 ; plus précisément, $7 \times 9 = 63 = 12 \times 5 + 3$. On passe donc du LA_3 au DO situé 5 octaves plus haut, c'est-à-dire au DO_8 en montant de 9 quintes.
3. On joue une note dont la fréquence est 311, 1 Hz.
   a. $q^3 = 2^{\frac{3}{12}} \approx 1,189$; $q^6 = 2^{\frac{6}{12}} \approx 1,414$; $q^9 = 2^{\frac{9}{12}} \approx 1,682$
   b. On cherche le nombre n de demi-tons dont il faut descendre pour passer du LA_4 à la note de fréquence 311,1 Hz ; on cherche donc n tel que $311,1 \times q^n = 440$ ou encore $311,1 \times 2^{\frac{n}{12}} = 440$:
   $311,1 \times 2^{\frac{n}{12}} = 440 \iff 2^{\frac{n}{12}} = \dfrac{440}{311,1} \iff 2^{\frac{n}{12}} \approx 1,414$ donc $n \approx 6$ d'après la question **3.a.**
   On descend donc de 6 demi-tons pour passer de la note de fréquence 440 Hz (le LA_3) à la note de fréquence 311,1 Hz.
   c. On descend de 6 demi-tons depuis la note LA_3 donc on arrive à la note $\text{RÉ\#}_3$:

$$\text{DO}_3 \quad \text{DO\#}_3 \quad \text{RÉ}_3 \quad \underbrace{\text{RÉ\#}_3 \quad \text{MI}_3 \quad \text{FA}_3 \quad \text{FA\#}_3 \quad \text{SOL}_3 \quad \text{SOL\#}_3 \quad \text{LA}_3}_{-6} \quad \text{LA\#}_3 \quad \text{SI}_3 \quad \text{DO}_4$$

EXERCICE 3 Enseignement renforcé (au choix) 7 points

1. On considère le point M_1 d'affixe $z_1 = 1 + \text{i}$.

a. Voir figure.

b. $|z_1|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $|z_1| = \sqrt{2}$

On écrit donc $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{i}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{i}\right)$

On cherche un réel α tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; le réel $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ répond à la question.

Le nombre complexe z_1 a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{\pi}{4}$.

2. On considère le nombre complexe z_2 de module 2 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$, et M_2 le point d'affixe z_2.

a. Le module de z_2 vaut 2 donc le point M_2 se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2.
Soit A le point d'affixe 2. On trace le point B tel que OAB soit un triangle équilatéral direct, et le point M_2 est tel que le triangle OBM_2 soit équilatéral direct. Ainsi l'angle AOM_2 mesure $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

b. Le nombre complexe z_2 a pour module 2 et pour argument $\dfrac{2\pi}{3}$ donc :

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \text{i}\sqrt{3}$$

3. a. $z_1 \times z_2 = (1+\text{i})\left(-1+\text{i}\sqrt{3}\right) = -1 - \text{i} + \text{i}\sqrt{3} + \text{i}^2\sqrt{3} = -1 + \text{i}\left(-1+\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} = \left(-1-\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(-1+\sqrt{3}\right)$

b. D'après le cours : $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ donc $|z_1 \times z_2| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$

On sait aussi que : $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ modulo 2π

donc $\arg(z_1 \times z_2) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{12} + \dfrac{8\pi}{12} = \dfrac{11\pi}{12}$ modulo 2π

Le nombre complexe $z_1 \times z_2$ a donc pour module $2\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{11\pi}{12}$.

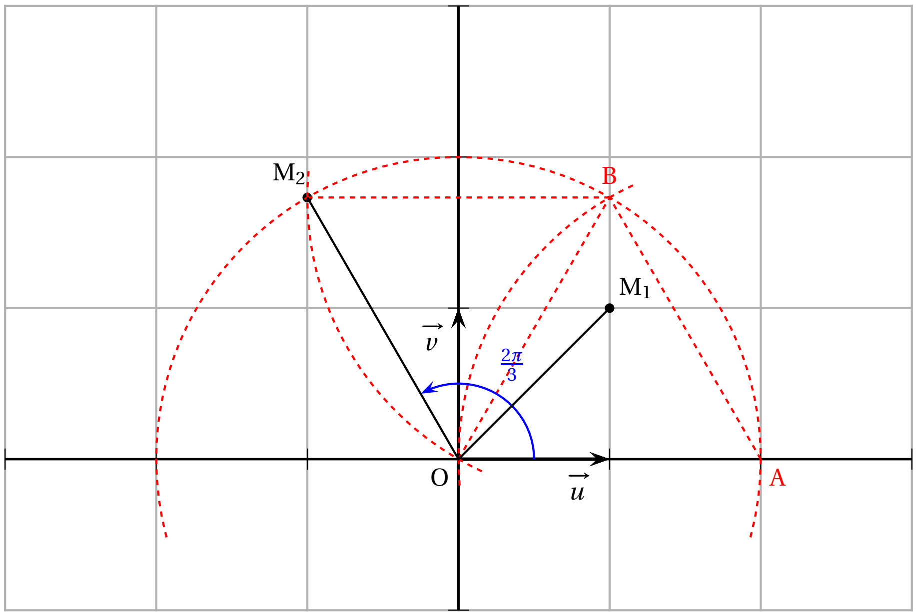
c. D'après la question **2.b.** on peut dire que $z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)\right)$.

D'après la question **2.a.** on peut dire que $z_1 \times z_2 = \left(-1-\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(-1+\sqrt{3}\right)$.

Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, on peut dire que :

$2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = -1 - \sqrt{3}$ et que $2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = -1 + \sqrt{3}$.

Donc $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.


M$_2$
B
M$_1$
$\vec{v}$
$\frac{2\pi}{3}$
O
$\vec{u}$
A