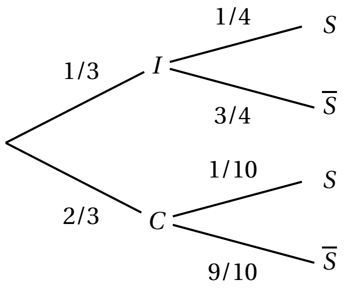
∽ Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse ∾ Métropole juin 2013

EXERCICE 1 — 6 points

1. On appelle $\overline{S}$ l'évènement « la personne choisie n'est pas soliste ».
On complète l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. a. La probabilité que la personne choisie soit un instrumentiste soliste est :
$p(I \cap S) = p(I) \times p_I(S) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

b. La probabilité que la personne choisie soit un soliste est, d'après la formule des probabilités totales :
$p(S) = p(I \cap C) + p(C \cap S) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{5}{60} + \dfrac{4}{60} = \dfrac{9}{60} = \dfrac{3}{20}$

3. $p(I) = \dfrac{1}{3}$ et $p(S) = \dfrac{3}{20}$ donc $p(I) \times p(S) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{20} = \dfrac{1}{20}$

$P(I \cap S) = \dfrac{1}{12}$ donc $p(I \cap S) \neq p(I) \times p(S)$ donc les évènements I et S ne sont pas indépendants.

4. La probabilité que la personne choisie soit un chanteur sachant qu'elle n'est pas soliste est :
$p_{\overline{S}}(C) = \dfrac{p(C \cap \overline{S})}{p(\overline{S})} = \dfrac{p(C \cap \overline{S})}{1 - p(S)} = \dfrac{\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}}{1 - \frac{3}{20}} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{17}{20}} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{20}{17} = \dfrac{12}{17}$

EXERCICE 2 — 8 points

Première partie

On considère la fonction g dérivable et définie sur l'intervalle I= [−1 ; 2] par $g(x) = \mathrm{e}^x - x + 1$.

1. a. $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$

b. $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \iff x > 0$
Sur l'intervalle I, $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ si $x \in]0\ ;\ 2]$.

2. a. $g(-1) = \mathrm{e}^{-1} + 2 \approx 2,37$; $g(0) = 2$; $g(2) = \mathrm{e}^2 - 1 \approx 6,39$
On dresse le tableau de variations de la fonction g sur I :

x	-1		0		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\mathrm{e}^{-1}+2$	↘	2	↗	$\mathrm{e}^2 - 1$

b. Le minimum de la fonction g sur I est 2 donc, pour tout x de I, $g(x) \geqslant 2$ donc $g(x) > 0$.

Deuxième partie

On considère la fonction f dérivable et définie sur l'intervalle I par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

1. Pour tout x de I : $f'(x) = 1 + \dfrac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} = 1 + \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1 - x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$
2. D'après la partie 1, $g(x) > 0$ pour tout x de I. De plus, $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x.
   Donc, pour tout x de I, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur I.
   $f(-1) = -\mathrm{e} \approx -2,72$ et $f(2) = 3 + 2\mathrm{e}^{-2} \approx 3,27$
   On dresse le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I :

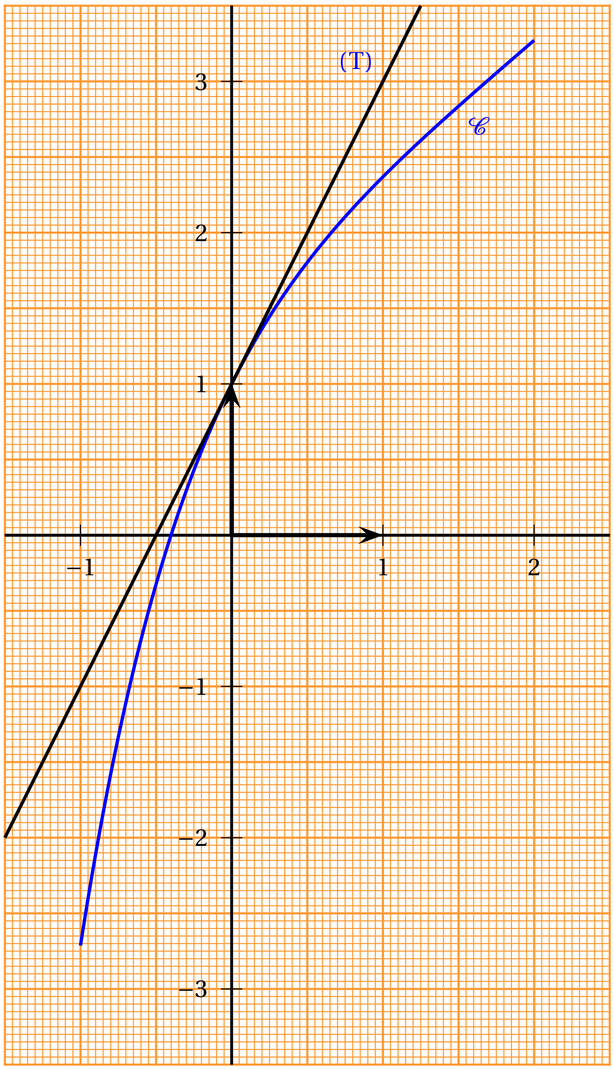
x	-1		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\mathrm{e}$	$\nearrow$	$3+2\mathrm{e}^{-2}$

3. **a.** La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 a pour équation :
   $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
   $f(0) = 1$ et $f'(0) = g(0) = 2$ donc (T) a pour équation $y = 2x + 1$.

   b. Recopier et compléter le tableau suivant (on arrondira les valeurs au centième).

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	$-2,72$	$-0,32$	1	1,80	2,37	2,83	3,27

   c. On trace la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente (T) dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$:



EXERCICE 3 — Enseignement obligatoire (au choix) — 6 points

1. Une conversation à voix basse a une intensité sonore de 10^{-10} W.m^{-2}.

Le niveau sonore de cette conversation est $L(10^{-10}) = 10\log\left(\dfrac{10^{-10}}{10^{-12}}\right) = 10\log(100) = 10\times 2 = 20$ dB.

2. Un marteau piqueur a un niveau sonore de 120 dB.

L'intensité sonore I de ce marteau piqueur est telle que :

$L(I) = 120 \iff 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) = 120 \iff \log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) = 12 \iff \dfrac{I}{10^{-12}} = 10^{12} \iff I = 10^{12} \times 10^{-12}$

$\iff I = 1$ W.m^{-2}

3. Un violon a un niveau sonore de 70 dB.

Les intensités sonores s'ajoutent ; on va donc calculer l'intensité sonore d'un violon, multiplier par 10 pour obtenir l'intensité sonore de 10 violons, puis déterminer à quel niveau sonore correspond cette nouvelle intensité.

L'intensité sonore I d'un violon est telle que :

$L(I) = 70 \iff 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) = 70 \iff \log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) = 7 \iff \dfrac{I}{10^{-12}} = 10^7 \iff I = 10^7 \times 10^{-12}$
$\iff I = 10^{-5}$ W.m^{-2}

L'intensité sonore de 10 violons est de $10 \times 10^{-5} = 10^{-4}$ W.m^{-2}.

Le niveau sonore de 10 violons est donc $L\left(10^{-4}\right) = 10\log\left(\dfrac{10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 10\log(10^8) = 10 \times 8 = 80$ dB.

4. L'oreille humaine est capable de percevoir les sons dont la fréquence est comprise entre 20 Hz et 20 000 Hz.

La mesure de cet intervalle est $10^3\log\left(\dfrac{20\,000}{20}\right) = 10^3\log(1\,000) = 10^3 \times 3 = 3\,000$ savarts.

5. La fréquence (arrondie à 1 Hz près) du DO_0 est de 33 Hz.

La fréquence du DO_1 est $33 \times q^{12} = 33 \times 2 = 66$ Hz.

Les fréquences des notes DO suivantes sont une suite géométrique de raison 2. On cherche donc le plus grand nombre entier n tel que $33 \times 2^n \leqslant 20\,000$:

$$33 \times 2^n \leqslant 20\,000 \iff 2^n \leqslant \dfrac{20\,000}{33} \iff \log(2^n) \leqslant \log\left(\dfrac{20\,000}{33}\right) \iff n\log(2) \leqslant \log\left(\dfrac{20\,000}{33}\right)$$
$$\iff n \leqslant \dfrac{\log\left(\dfrac{20\,000}{33}\right)}{\log(2)} \iff n \leqslant 9,24$$

Il y a donc 10 DO différents correspondant aux octaves 0 à 9 :

octave	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
note	DO_0	DO_1	DO_2	DO_3	DO_4	DO_5	DO_6	DO_7	DO_8	DO_9
fréquence	33	66	132	264	528	1 056	2 112	4 224	8 448	16 896

6. On sait que la fréquence du LA_3 est 440 Hz. On enregistre un son sur un oscilloscope et on obtient un signal périodique de période 18,2 millisecondes.

Une période de 18,2 millisecondes correspond à une période de $18,2 \times 10^{-3}$ seconde et donc à une fréquence de $\dfrac{1}{18,2 \times 10^{-3}} \approx 55$ Hz.

On cherche le nombre de demi-tons dont il faut descendre pour passer d'une note de 440 Hz à une note de 55 Hz; on cherche donc l'entier relatif n tel que $440 \times q^n = 55$, et comme $q^{12} = 2$ on a $440 \times 2^{\frac{n}{12}} = 55$. On résout cette équation :

$$440 \times 2^{\frac{n}{12}} = 55 \iff 2^{\frac{n}{12}} = \dfrac{55}{440} \iff \log\left(2^{\frac{n}{12}}\right) = \log\left(\dfrac{55}{440}\right) \iff \dfrac{n}{12}\log(2) = \log\left(\dfrac{55}{440}\right) \iff \dfrac{n}{12} = \dfrac{\log\left(\frac{55}{440}\right)}{\log(2)}$$
$$\iff n = 12 \times \dfrac{\log\left(\frac{55}{440}\right)}{\log(2)} \iff n = -36$$

$n = -36$ est un multiple de 12 donc on reste sur la même note, et $-36 = -3 \times 12$ donc on descend de 3 octaves : la note obtenue est donc LA_0.

EXERCICE 4 — Enseignement renforcé (au choix) — 6 points

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_{\text{A}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{B}} = -\sqrt{3} + 3\text{i}$.

1. Voit figure à la fin de l'exercice.

2. **a.** On sait que $\text{i}^2 = -1$ donc $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \dfrac{-\sqrt{3}+3\text{i}}{3+\text{i}\sqrt{3}} = \dfrac{\text{i}^2\sqrt{3}+3\text{i}}{3+\text{i}\sqrt{3}} = \dfrac{\text{i}\left(\text{i}\sqrt{3}+3\right)}{3+\text{i}\sqrt{3}} = \text{i}$

b. $\left|\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}\right| = |\text{i}| = 1$

On sait que $z_{\text{A}} = \text{OA}$ et $z_{\text{B}} = \text{OB}$ donc $\left|\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}\right| = 1 \iff \dfrac{|z_{\text{B}}|}{|z_{\text{A}}|} = 1 \iff \dfrac{\text{OB}}{\text{OA}} = 1 \iff \text{OB} = \text{OA}$

3. a. $|z_A|^2 = 3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 12$ donc $|z_A| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On peut donc écrire : $z_A = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{3}} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

On cherche le réel θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ à 2π près.

Le nombre $\dfrac{\pi}{6}$ est un argument de z_A.

b. On admet qu'un argument de z_B est $\dfrac{2\pi}{3}$.

$\widehat{\text{AOB}} = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ (voir figure)

4. OA = OB et $\widehat{\text{AOB}} = \dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle OAB isocèle rectangle en O.