Corrigé du Baccalauréat technologique TMD
Métropole 19 juin 2018

Le candidat traitera **trois** EXERCICES :

- **Obligatoirement l'exercice1**
- **Obligatoirement l'exercice 2**
- **L'exercice** 3 (qui porte sur le programme de l'enseignement obligatoire)
  OU l'exercice 4 (qui porte sur le programme de l'enseignement renforcé.

Le candidat indiquera clairement son choix sur la copie.

La page 6 /6 est une annexe à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 **(6 points)**

Dans cet exercice, on s'intéresse aux blessures liées à la pratique de la danse chez des professionnels. Ces blessures s'apparentent à celles rencontrées chez les sportifs de haut niveau.
Dans la suite de l'exercice, on désignera par **« danseur » une femme ou un homme** pratiquant la danse de manière professionnelle.
La région pied-cheville est particulièrement sollicitée au cours de la carrière de danseur et les blessures de cette partie du corps nécessitent un traitement spécifique.
Dans une clinique spécialisée dans le traitement des blessures des sportifs, on étudie les dossiers des danseurs qui ont été soignés pour des blessures liées à leur profession.

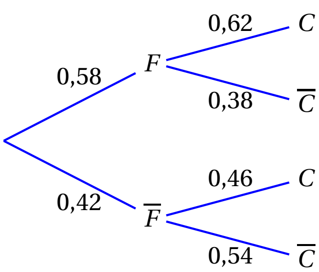
On constate que :

- 58 % des danseurs soignés dans cette clinique, pour des blessures liées à leur profession, sont des femmes ;
- parmi les danseurs soignés dans cette clinique, pour des blessures liées à leur profession :
  - □ 46 % des hommes ont été soignés pour des blessures de la région pied-cheville ;
  - □ 62 % des femmes ont été soignées pour des blessures de la région pied-cheville.

On choisit au hasard le dossier d'un danseur soigné dans cette clinique pour une blessure liée à sa profession.
On note F l'évènement « le dossier est celui d'une femme » et C l'évènement « le dossier est celui d'un danseur qui a été soigné pour une blessure de la région pied-cheville ».

B étant un évènement de probabilité non nulle, $P_B(A)$ est la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. $\overline{B}$ est l'évènement contraire de B.

1. Donnons à partir de l'énoncé :
   a. la probabilité $P(F)$ de l'évènement F. $P(F) = 0{,}58$ car 58 % des danseurs soignés dans cette clinique, pour des blessures liées à leur profession, sont des femmes ;
   b. la probabilité $P_F(C)$ de l'évènement C sachant que l'évènement F est réalisé.
   $P_F(C) = 0{,}62$ car 62 % des femmes ont été soignées pour des blessures de la région pied-cheville.
2. La situation de l'exercice est modélisée par l'arbre pondéré représenté ci-dessous.



3. **a.** L'évènement $\overline{F} \cap C$ est : « Le dossier est celui d'un danseur homme soigné pour des blessures pied-cheville ».
   b. Sa probabilité $P\left(\overline{F} \cap C\right)$ est : $P\left(\overline{F} \cap C\right) = P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(C) = 0{,}42 \times 0{,}46 = 0{,}1932$.

4. Montrons que la probabilité $P(C)$ de l'évènement C est égale à 0,552 8. C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers.
   $P(C) = P(F \cap C) + P\left(\overline{F} \cap C\right) = P(F) \times P_F(C) + 0{,}193\,2 = 0{,}58 \times 0{,}62 + 0{,}193\,2 = 0{,}359\,6 + 0{,}193\,2 = 0{,}552\,8.$
   Nous obtenons bien la valeur cherchée.
5. La directrice de la clinique affirme que plus d'un tiers des danseurs soignés dans son établissement pour une blessure pied-cheville sont des hommes. Cette affirmation est exacte.
   Calculons, sachant que le danseur est soigné pour une blessure pied-cheville, la probabilité qu'il soit un homme c'est-à-dire calculons $P_C(\overline{F})$
   $P_C(\overline{F}) = \dfrac{P\left(\overline{F} \cap C\right)}{P(C)} = \dfrac{0{,}193\,2}{0{,}552\,8} \approx 0{,}349\,5$. Le résultat est supérieur à un tiers.

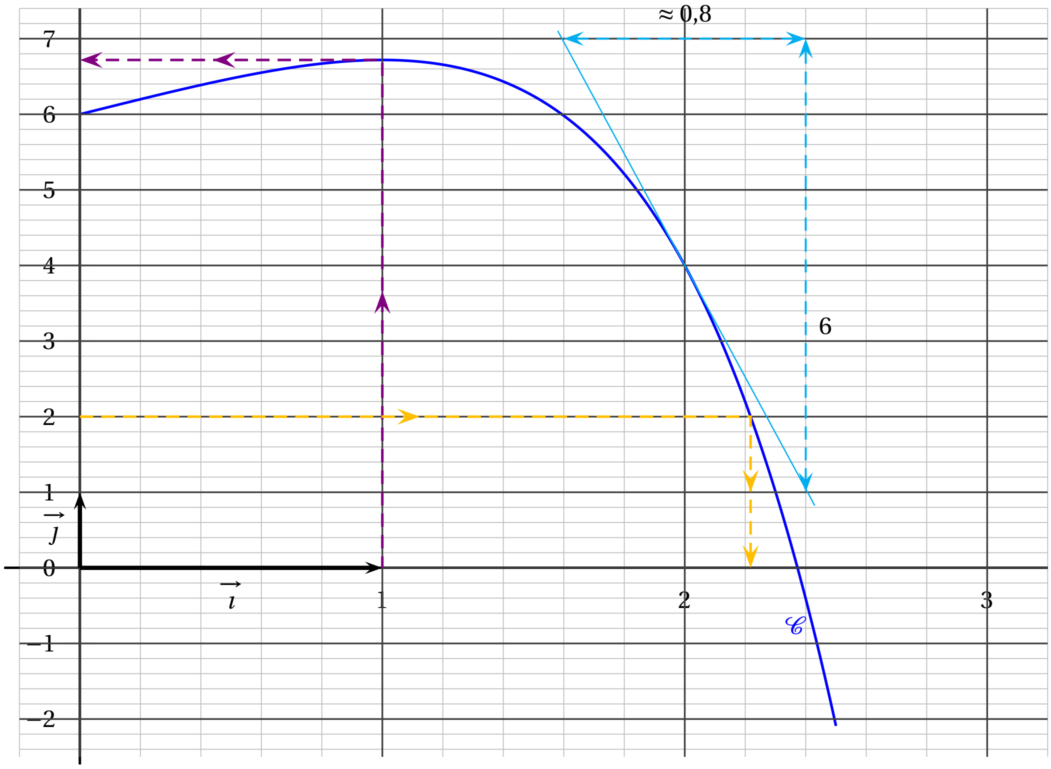
EXERCICE 2 **(8 points)**

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,2{,}5]$. On désigne par f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie 1 : Lecture graphique

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Les réponses aux questions suivantes seront données avec la précision permise par la lecture du graphique. Aucune justification n'est attendue.

1. La valeur de $f'(2)$ le nombre dérivé de f en 2 est d'environ 7,5.
2. La valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2{,}5]$ est d'environ 6,75.
3. Graphiquement dans l'intervalle $[0\,;\,2{,}5]$ l'équation $f(x) = 2$ a une solution 2,21.



Partie 2 : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,2{,}5]$ par l'expression :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x + 4.$$

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;2{,}5]$, $f'(x) = -1 \times \text{e}^x + (2-x)\text{e}^x = (1-x)\text{e}^x$.

2. Étudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;2{,}5]$.
Sur $\mathbb{R}$, $\text{e}^x > 0$ il en est de même sur $[0\,;2{,}5]$. Par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

x	0		1		2,5
$1-x$		+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	

3. Donnons les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2{,}5]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $[0\,;\,1[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Sur $]1\,;\,2{,}5]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Construisons le tableau de variation de f sur $[0;2{,}5]$.

x	0		1		2,5
$f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	6	$\nearrow$	$\text{e}+4$	$\searrow$	$\approx -2{,}09$

4. Calculons la valeur exacte de $f'(2)$ le nombre dérivé de f en 2. $f'(2) = (1-2)\text{e}^2 = -\text{e}^2$.

5. Montrons que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;2{,}5]$, $f(x) < 6{,}75$. La fonction f admet un maximum en 1 qui vaut $\text{e}+4$ soit approximativement 6,728 18.
Comme 6,75 >6,71, pour tout $x \in [0\,;2{,}5]$, $f(x) < 6{,}75$.

6. On admet que l'équation $f(x) = 2$ possède une seule solution comprise entre 2 et 2,5.
Appelons-la α.
À l'aide de la calculatrice, un encadrement au centième de α est $2{,}21 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}22$.

EXERCICE 3 portant sur l'enseignement obligatoire (6 points)

Rappels :

— Dans la gamme de tempérament égal, l'octave est divisée en douze demi-tons égaux séparant les notes DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI.
Quand on monte d'un demi-ton, la fréquence de la note, exprimée en hertz (Hz), est multipliée par $2^{\frac{1}{12}}$.

— On dit qu'une note N_1 est plus aiguë qu'une note N_2 lorsque la fréquence de N_1 est supérieure à celle de N_2. On dit également que N_2 est plus grave que N_1.

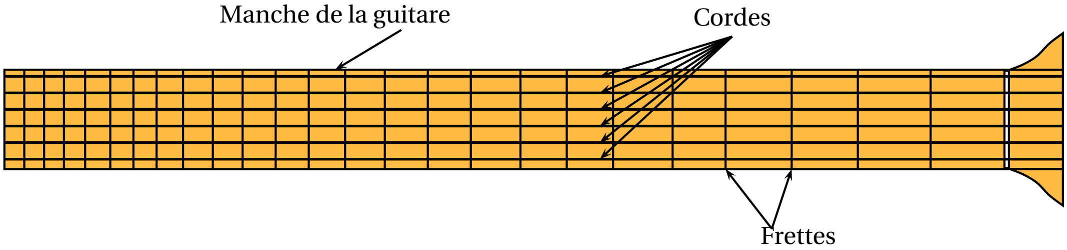
— À chaque octave est associé un indice n entier naturel et les notes d'une octave portent l'indice de cette octave. Ainsi LA_3 (le LA du diapason) correspond à la note LA de l'octave d'indice 3 et LA_4 correspond à la note LA de l'octave d'indice 4 située au-dessus de l'octave d'indice 3. La fréquence de la note LA_3 est égale à 440 Hz.

— Si I est l'intensité sonore (exprimée en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$) d'un son, alors son niveau sonore, exprimé en décibels (dB), est $N(I) = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$

— Les intensités sonores s'ajoutent.

— La différence de hauteur, exprimée en savarts, entre deux notes de fréquences f_1 et f_2 exprimées en hertz (avec $f_1 > f_2$), est donnée par $1\,000\log\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)$, où log désigne la fonction logarithme décimal.

On considère une guitare qui comporte six cordes et des tiges métalliques situées sur le manche, appelées frettes, permettant en pinçant les cordes de modifier la note produite.



On peut gratter chaque corde « à vide », c'est-à-dire sans pincer la corde sur le manche, ce qui produit un son ; on peut aussi gratter chaque corde en la pinçant entre deux frettes, ce qui produit un autre son.

— Les notes produites par chacune des six cordes grattées « à vide » sont les suivantes : MI_1, LA_1, RÉ_2, SOL_2, SI_2 et MI_3.

— En pinçant une corde, on peut monter au maximum de 24 demi-tons à partir de la note obtenue lorsque la même corde est grattée « à vide ».

1. La note la plus aiguë que l'on puisse obtenir avec cette guitare est MI_5.
La note la plus aiguë « à vide » est MI_3. En ajoutant 24 demi-tons ou 2 octaves, maximum possible, nous obtenons MI_5.

2. **a.** Justifions que la fréquence, arrondie à l'unité, de la note MI_3 vaut 330 Hz.
La suite des fréquences forme une suite géométrique de raison $q = 2^{\frac{1}{12}}$.
Entre MI_3 et LA_3, il y a 5 demi-tons. Si f est la fréquence de MI_3, la fréquence du LA_3 est $f \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^5$ d'une part et 440 de l'autre.

Nous avons donc $f \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^5 = 440$ d'où $f = \dfrac{440}{\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^5} \approx 330$.

b. Calculons la fréquence, arrondie à l'unité, de la note la plus grave produite par une corde grattée « à vide » (MI_1).
En ajoutant 2 octaves à MI_1 nous obtenons MI_3. À chaque octave ajoutée, nous multiplions la fréquence par 2 d'où la fréquence de MI_1 est le quart de la fréquence de MI_3 soit à l'unité près 83.

c. Calculons la différence de hauteur, exprimée en savarts, entre les notes MI_1 et MI_3.
La différence de hauteur, exprimée en savarts, entre deux notes de fréquences f_1 et f_2 exprimées en hertz (avec $f_2 > f_1$), est donnée par $1\,000 \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)$

Nous avons $\dfrac{f_2}{f_1} = 4$ d'où $1\,000 \log(4) \approx 602$
la différence de hauteur entre les notes MI_1 et MI_3 est 602 savarts.

3. **a.** Le tableau est complété sur l'**annexe page 6/6, à rendre avec la copie.**

b. Un guitariste a endommagé la corde qui produit un MI_3 à vide et ne peut s'en servir.
Le guitariste peut jouer de Mi_1 à Si_1 soit 7 demi-tons, puis de Si_1 à Si_4, soit $3 \times 12 = 36$.
$7 + 36 = 43$ demi-tons séparent désormais la note la plus grave MI_1 et la note la plus aiguë SI_4 jouable sur cette guitare.

4. Le niveau sonore des sons produits par cette guitare vaut 90 dB.
Quatre guitares du même modèle jouent simultanément avec un niveau sonore de 90 dB chacune.
Calculons le niveau sonore, exprimé en dB, des sons produits par ces quatre guitares jouant simultanément.
Si I est l'intensité sonore d'une guitare, nous avons $4I$ l'intensité sonore des quatre guitares. Le niveau sonore est alors :
$N(4I) = 10\log\left(\frac{4I}{10^{-12}}\right) = 10\left(\log\left(4 \times \frac{I}{10^{-12}}\right)\right) = 10\left(\log 4 + \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)\right) = 10\log(4) + N(I)$
$N(4I) = 90 + 10\log 4 \approx 96{,}02$
Le niveau sonore des sons produits par ces quatre guitares jouant simultanément est de 96,02 dB.

EXERCICE 4 portant sur l'enseignement renforcé **(6 points)**

Le rapport 2017 du SNEP (Syndicat National de l'Édition Phonographique) présente une synthèse du marché français de la musique enregistrée.
La répartition ci-dessous donne les revenus annuels de la musique enregistrée en France entre 2010 et 2016, les montants étant exprimés en **millions d'euros**.
On distingue deux types de revenus :

— les revenus des ventes physiques correspondant aux ventes de CD, disques vinyles,...

— les revenus des ventes numériques correspondant aux ventes des services d'accès à la musique en ligne (téléchargement légal ou lecture en ligne).

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6
Revenus annuels des ventes physiques en millions d'euros : y_i	466	413	364	367	325	274	267
Revenus annuels des ventes numériques en millions d'euros : z_i	88	111	125	126	133	152	183

Source : rapport 2017 du SNEP

Le nuage des points de coordonnées $(x_i~;~y_i)$ associé à la série des revenus des ventes physiques est représenté, en annexe page 6/6, par des croix ×.

Le nuage des points de coordonnées $(x_i~;~z_i)$ associé à la série des revenus des ventes numériques est représenté, en annexe page 6/6, par des points •.

1. On note $\mathcal{D}$ la droite d'ajustement de y en x de la série $(x_i~;~y_i)$, obtenue par la méthode des moindres carrés. À l'aide de la calculatrice,l'équation de la droite $\mathcal{D}$ est $y = -32,64x + 451,64$. Elle est tracée dans le repère donné en **annexe page 6/6, à rendre avec la copie**. Les valeurs a et b sont arrondies au centième.

Dans la suite de l'exercice, on choisit de modéliser l'évolution des revenus des ventes physiques jusqu'en 2020 par la droite d'équation $y = -33x + 452$.

2. Donner une estimation des revenus, en millions d'euros, des ventes physiques en 2020, selon ce modèle. En 2020 $x = 10$.

En remplaçant x par 10 dans l'équation de la droite $y = -33 \times 10 + 452 = 122$. Selon ce modèle une estimation du revenu des ventes physiques en 2020 serait d'environ 122 millions d'euros.

On admet qu'une droite d'ajustement de la série $(x_i~;~z_i)$ a pour équation $y = 13x + 91$ et que ce modèle est valide jusqu'en 2020.

3. Selon ce modèle, à partir de quelle année le revenu des ventes numériques sera-t-il supérieur à 210 millions d'euros? Pour ce faire, résolvons $13x + 91 \geqslant 210$.

$13x + 91 \geqslant 210 \quad 13x \geqslant 119 \quad x \geqslant \frac{119}{13} \quad \frac{119}{13} \approx 9,15$.

Selon ce modèle, à partir de 2020 le revenu des ventes numériques sera supérieur à 210 millions d'euros.

4. En utilisant ces deux modèles, estimons l'année à partir de laquelle les revenus des ventes numériques dépasseront les revenus des ventes physiques. Pour ce faire, déterminons la plus petite abscisse pour laquelle l'ordonnée d'un point de la droite d'ajustement des recettes des ventes numériques est supérieure à l'ordonnée d'un point de la droite d'ajustement des revenus des ventes physiques.

Résolvons $13x + 91 \geqslant -33x + 452$.

$13x + 91 \geqslant -33x + 452 \quad (13 + 33)x \geqslant 452 - 91 \quad 46x \geqslant 361 \quad x \geqslant \frac{361}{46} \quad \frac{361}{46} \approx 7,84$.

En utilisant ces deux modèles, l'année à partir de laquelle les revenus des ventes numériques dépasseront les revenus des ventes physiques est 2018.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE3

Question 3.a.

Notes	MI$_1$ et LA$_1$	LA$_1$ et RÉ$_2$	RÉ$_2$ et SOL$_2$	SOL$_2$ et SI$_2$	SI$_2$ et MI$_3$
Nombre de demi-tons séparant les deux notes	5	5	5	4	5

DO$_1$ DO# RÉ RÉ# MI$_1$ FA FA# SOL SOL# LA$_1$ LA# SI$_1$ DO$_2$ DO# RÉ$_2$ …

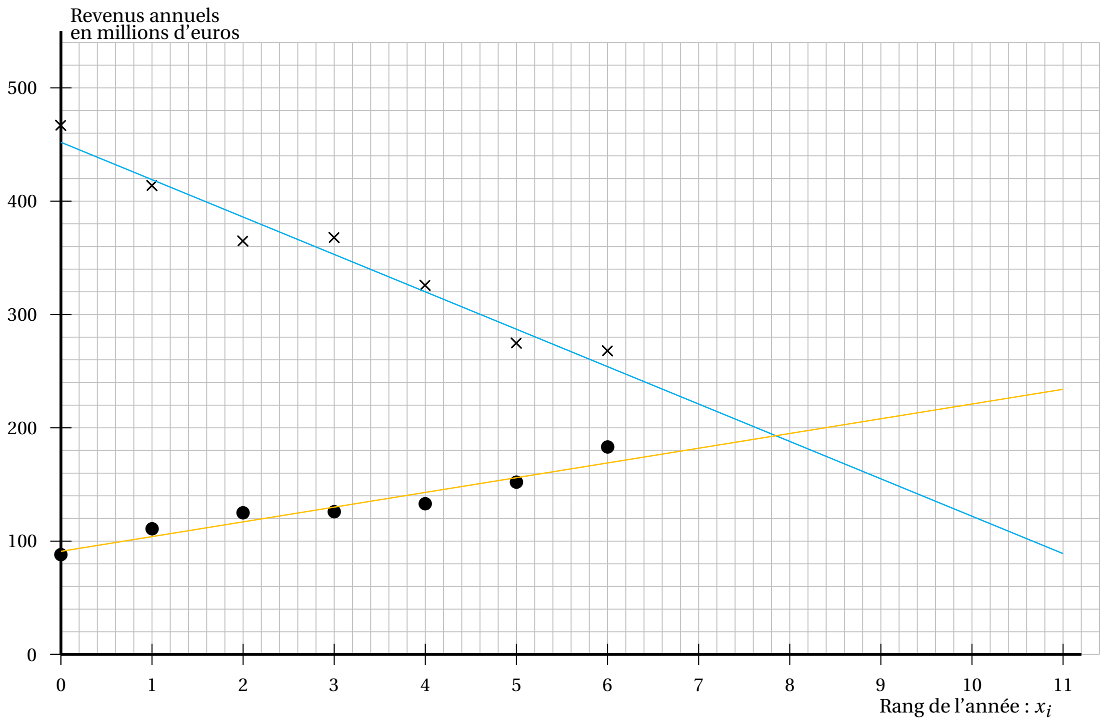
+5 +5

… RÉ$_2$ RÉ# MI FA FA# SOL SOL# LA$_2$ LA# SI$_2$ DO$_3$ DO# RÉ$_3$ RÉ# MI$_3$ …

+5 +4 +5

EXERCICE 4

Question 1.



Le nuage des points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série des revenus des ventes physiques est représenté par des croix ×.
Le nuage des points de coordonnées $(x_i\ ;\ z_i)$ associé à la série des revenus des ventes numériques est représenté par des points •.