Corrigé du baccalauréat technologique Métropole
Techniques de la musique et de la danse 19 juin 2018

Le candidat traitera **trois** EXERCICES :

- **Obligatoirement l'exercice 1**
- **Obligatoirement l'exercice 2**
- **L'exercice** 3 (qui porte sur le programme de l'enseignement obligatoire)
  OU **l'exercice** 4 (qui porte sur le programme de l'enseignement renforcé.

Le candidat indiquera clairement son choix sur la copie.

L'annexe en page 7 est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (7 points)

Une classe de Terminale TMD comporte des élèves musiciens et des élèves danseurs.
Pour les besoins d'une enquête, on a distribué un questionnaire concernant les loisirs à tous les élèves de cette classe. Tous y ont répondu.
Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A :

Dans cette partie, on choisit un questionnaire au hasard parmi ceux des **élèves musiciens** interrogés.
On considère les évènements :

F : « le questionnaire est celui d'une fille » ;

L : « le questionnaire est celui d'un élève dont le loisir préféré est la lecture ».

On rappelle que B étant un évènement de probabilité non nulle, $P_B(A)$ est la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. $\overline{B}$ est l'évènement contraire de B.

1. Le tableau d'effectifs est complété sur l' **annexe page 7/7, à rendre avec la copie**.
   Dans toute la suite de cette partie les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
   L'univers est l'ensemble des élèves musiciens interrogés. La loi mise sur cet univers est la loi équiprobable. Il en résulte que la probabilité d'un événement A est : $P(A) = \dfrac{\text{cardinal de A}}{\text{cardinal de l'univers}}$.
   Le cardinal de l'univers est 9.
2. **a.** La probabilité $P(F)$: $P(F) = \dfrac{4}{9}$.

   b. La probabilité $P(L)$: $P(L) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

   c. $F \cap L$: Le questionnaire est celui d'une fille dont le loisir préféré est la lecture.
   Sa probabilité : $P(F \cap L) = \dfrac{2}{9}$.

   d. Les évènements F et L sont indépendants si et seulement si $P(F \cap L) = P(F) \times P(L)$.
   $P(F) \times P(L) = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{27}$
   $\dfrac{2}{9} \neq \dfrac{4}{27}$. Par conséquent les évènements F et L ne sont pas indépendants.
3. **a.** Sachant que le questionnaire choisi est celui d'une fille, la probabilité que ce soit celui d'un élève dont le loisir préféré est la lecture est notée $P_F(L)$. $P_F(L) = \dfrac{P(F \cap L)}{P(F)} = \dfrac{\left(\frac{2}{9}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)} = \dfrac{1}{2}$.

   b. $P_{\overline{F}}(L) = \dfrac{P(\overline{F} \cap L)}{P(\overline{F})} = \dfrac{\left(\frac{1}{9}\right)}{\left(\frac{5}{9}\right)} = \dfrac{1}{5}$.

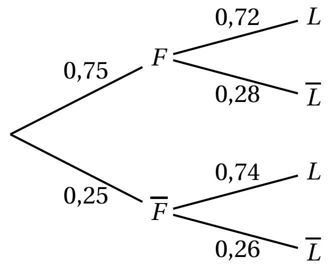
Partie B

Dans cette partie, on choisit un questionnaire au hasard parmi ceux des **élèves danseurs** interrogés.
On reprend les mêmes notations pour les évènements que dans la **partie A** c'est-à-dire :

F : « le questionnaire est celui d'une fille » ;

L : « le questionnaire est celui d'un élève dont le loisir préféré est la lecture ».

On admet que l'on peut modéliser cette expérience aléatoire par l'arbre de probabilités suivant :



Dans toute la suite de cette partie les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Par lecture de l'arbre, la probabilité que le questionnaire soit celui d'un élève dont le loisir préféré est la lecture sachant que c'est une fille est notée $P(F \cap L)$.
   $P(F \cap L) = p(F) \times P_F(L) = 0{,}75 \times 0{,}72 = 0{,}54$
2. Déterminons $P(L)$. F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers donc
   $P(L) = P(F \cap L) + P(\overline{F} \cap L) = 0{,}54 + 0{,}25 \times 0{,}74 = 0{,}54 + 0{,}185 = 0{,}725$
3. Le professeur de danse a calculé que parmi les lecteurs, 74 % d'entre eux sont des filles.
   A-t-il raison ?
   Pour répondre à cette question, calculons $\mathrm{P}_L(F)$. $P_L(F) = \dfrac{P(F \cap L)}{P(L)} = \dfrac{0{,}54}{0{,}725} \approx 0{,}7448$.
   Par conséquent le professeur de danse a raison.

EXERCICE 2 — 6 points

RAPPELS

- Dans la gamme de tempérament égal, l'octave est divisée en douze demi-tons égaux séparant les notes DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI. Quand on monte d'un demi-ton, la fréquence de la note, exprimée en hertz (Hz), est multipliée par $2^{\frac{1}{12}}$.
- À chaque octave est associé un indice n entier naturel et les notes d'une octave portent l'indice de cette octave. Ainsi LA_3 (le LA du diapason) correspond à la note LA de l'octave d'indice 3 et LA_4 correspond à la note LA de l'octave d'indice 4 située au dessus de l'octave d'indice 3. La fréquence de la note LA_3 est égale à 440 Hz .
- La différence de hauteur, exprimée en savarts, entre deux notes de fréquences f_1 et f_2 exprimées en hertz (avec $f_1 > f_2$), est donnée par $1\,000 \log\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)$, où log désigne la fonction logarithme décimal.
- Une quinte juste contient sept demi-tons.
- Lorsque deux entiers a et b ont le même reste dans la division euclidienne par 12, on dit que a est congru à b modulo 12 et on note $a \equiv b$ modulo 12.

Luc et Émilie sont frère et sœur ; ils aiment tous deux la musique et l'arithmétique.
Ils s'amusent parfois à inventer de petits jeux qui mêlent les deux disciplines.

1. **Premier jeu :** Luc propose une note. Émilie joue avec sa clarinette la note 3 quintes au dessus de celle proposée par Luc.
   a. Luc propose la note $\text{RÉ\#}_3$. La note jouée par Émilie est DO_5.
   Partant de la note RÉ#, elle ajoute 3 quintes soit $3 \times 7 = 21$ demi-tons. $21 = 12 \times 2 - 3$ donc 2 octaves -3

   +24

   $\text{RÉ\#}_3$ …… DO_5 $\text{DO\#}_5$ RÉ_5 $\text{RÉ\#}_5$ MI_5 FA_5 $\text{FA\#}_5$ SOL_5 $\text{SOL\#}_5$ LA_5 …

   -3

b. Si Émilie joue un SI_5, la note proposée par Luc est RÉ_4. Il faut donc ôter 21 demi-tons. De SI_5 à SI_3 nous ôtons 24 demi-tons
Il faut donc en ajouter 3.

$$\ldots \quad \text{LA}_3 \quad \text{LA\#}_3 \quad \text{SI}_3 \quad \text{DO}_4 \quad \text{DO\#}_4 \quad \text{RÉ}_4 \quad \ldots$$

$$+3$$

c. Calculons la fréquence du $\text{RÉ\#}_3$; *le résultat sera arrondi à l'entier le plus proche.*
La suite des fréquences forme une suite géométrique de raison $q = 2^{\frac{1}{12}}$; il y a 6 demi-tons entre $\text{RÉ\#}_3$ et LA_3 donc la fréquence f_1 de la note $\text{RÉ\#}_3$ est telle que
$f_1 \times q^6 = 440$ or $f_1 \times 2^{\frac{6}{12}} = f_1 \times \sqrt{2} = 440$ donc $f_1 = \dfrac{440}{\sqrt{2}} \approx 311\,\text{Hz}$.

d. Calculons le rapport de fréquence entre la note proposée par Luc et celle jouée par Émilie.
Il y a 21 demi-tons entre les deux notes. En appelant f_2 la fréquence de la note jouée par Émilie nous avons $f_2 = f_1 \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{21}$ d'où $\dfrac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{21}{12}} = 2^{\frac{7}{4}}$.

e. $f_2 > f_1$ la différence de hauteur, en savarts, entre la note proposée par Luc et celle jouée par Émilie est donnée par $1\,000 \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)$ soit $1\,000 \log\left(2^{\frac{7}{4}}\right) \approx 526,8$ soit à l'entier près 527.

2. Deuxième jeu : Lorsque Luc joue une note, Émilie repère l'entier naturel n correspondant à cette note dans le tableau ci-dessous et calcule l'entier m compris entre 0 et 11 de la façon suivante :

$$m \equiv 5n + 1 \text{ modulo } 12.$$

Elle joue ensuite la note associée à m avec sa clarinette.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Note associé à n	DO	DO#	RÉ	RÉ#	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI

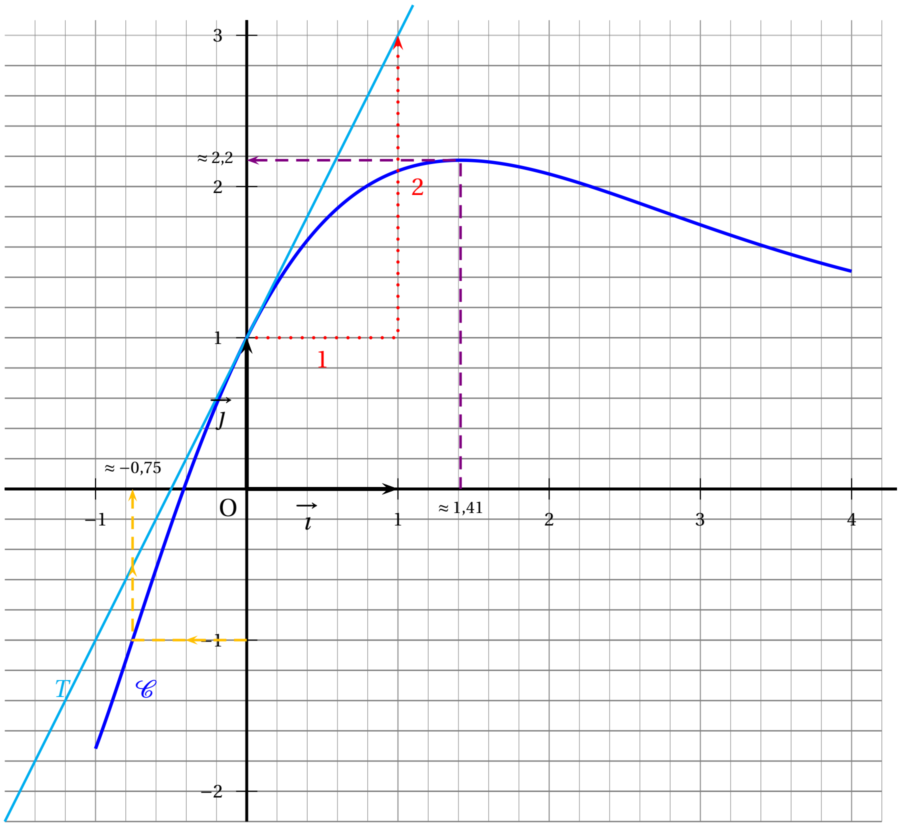
a. Luc joue un DO. La note jouée par Émilie est DO# car $m = 5 \times 0 + 1 = 1$

b. Le tableau est complété sur l'**annexe page 7/7, à rendre avec la copie**.

c. Émilie joue la phrase musicale suivante :
DO# — DO# — DO# — SI — LA — SI — DO# — LA — SI — SI — DO#.
Écrivons, à l'aide du tableau composé sur l'annexe, la phrase musicale jouée par Luc.
DO — DO — DO — RÉ — MI — RÉ — DO — MI — RÉ — RÉ — DO.

EXERCICE 3 portant sur l'enseignement obligatoire — 7 points

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,4]$. On désigne par f' sa fonction dérivée. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous. La droite T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $x = 0$.



Partie A : lecture graphique

Les réponses aux questions suivantes seront données avec la précision permise par la lecture du graphique. Aucune justification ni aucun calcul ne sont attendus.

1. La valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ est d'environ 2,2. Elle est atteinte pour une valeur proche de 1,4.
2. L'ensemble solution de l'équation $f(x) = -1$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ est $\{\approx -0{,}75\}$.
3. La valeur de $f'(0)$ est 2. (voir en rouge sur la figure)

Partie B : étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{\mathrm{e}^x} + 1.$$

1. À l'aide de la calculatrice, le tableau de valeurs est complété sur l'**annexe page 7/7, à rendre avec la copie**. Ces valeurs sont arrondies au **centième**.
2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\mathrm{e}^x - (x^2+2x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(2x+2-(x^2+2x))}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{2-x^2}{\mathrm{e}^x}.$$

   Nous trouvons bien le résultat attendu.

3. **a.** $2 - x^2$ est de la forme $a^2 - b^2$ où $a = \sqrt{2}$ et $b = x$ d'où $2 - x^2 = \left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + x\right)$.

   b. Déterminons le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$.
   $x \in [-1\ ;\ 4]$, $\quad x + \sqrt{2}$ est strictement positif. Il en résulte que le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{2} - x$

x	-1		$\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. Donnons les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1~;~4]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $\left[-1~;~\sqrt{2}\right[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Sur $\left]\sqrt{2}~;~4\right]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Construisons le tableau de variation de f sur $[-1~;~4]$.

x	-1		$\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f			$\approx 2{,}174$		
	$1-\mathrm{e}$	$\nearrow$		$\searrow$	$24\mathrm{e}^{-4}+1$

d. La fonction f' s'annulant en changeant de signe en $\sqrt{2}$ alors f admet en ce point un extremum. Cet extremum est un maximum car f est d'abord croissante et ensuite décroissante. Sur l'intervalle $[-1~;~4]$ f admet une valeur maximale $f(\sqrt{2})$. $f(\sqrt{2}) = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}} + 1$.
$f(\sqrt{2}) \approx 2{,}17$ à 10^{-2} près.

4. $f'(0) = \dfrac{2-0^2}{\mathrm{e}^0} = 2$.

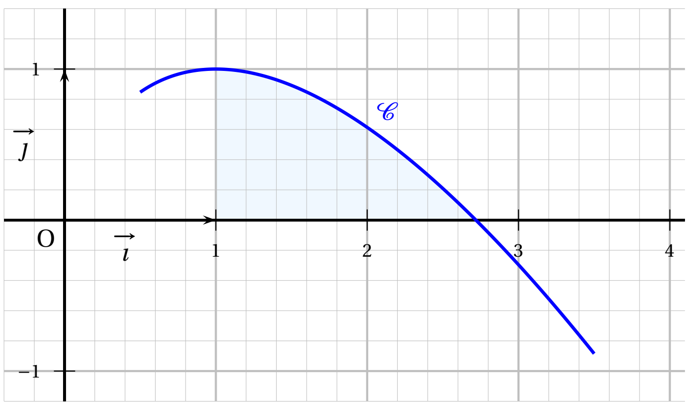
5. La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente T au point A d'abscisse 0.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :
$y = f(a) + f'(a)(x-a)$
Une équation de la droite T est $y = 2x+1$.

EXERCICE 4 portant sur l'enseignement renforcé **7 points**

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0{,}5~;~3{,}5]$, d'expression :

$$f(x) = x - x\ln(x) \text{ où } \ln \text{ représente le logarithme népérien du nombre } x.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.



1. Calculons la valeur exacte du nombre $f(\mathrm{e})$. $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrons que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,5~;~3,5]$, $f'(x) = -\ln(x)$.

$f'(x) = 1 - \left(\ln(x) - x \times \dfrac{1}{x}\right) = 1 - (\ln(x) + 1) = -\ln(x)$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0,5~;~3,5]$.

Si $x \in]0~;~1[$, $\ln(x) < 0$ et si $x \in]1~;~+\infty[$ $\ln(x) > 0$.

x	$0,5$		1		$3,5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. Étudions la variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,5~;~3,5]$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Sur $[0,5~;~1[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $]1~;~3,5]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Construisons le tableau de variation de f sur $[0,5~;~3,5]$.

x	$0,5$		1		$3,5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$\frac{\ln(2)+1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{7+7\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{2}$

3. Justifions que $f(x)$ est positif, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

Sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ la fonction est strictement décroissante $1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$ entraîne $f(1) \geqslant f(x) \geqslant f(\mathrm{e})$. Or question 1 $f(\mathrm{e}) = 0$ donc sur cet intervalle $f(x)$ est positif.

4. Par lecture graphique, l'aire grisée a une valeur comprise entre 1 u.a et 2 u.a.

5. **a.** On considère la fonction F définie, pour tout réel x de l'intervalle $[0,5~;~3,5]$, par :

$$F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{2}\ln(x)$$

La fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5~;~3,5]$ si $F' = f$.

$F'(x) = \dfrac{3}{4}(2x) - \left(\dfrac{2x}{2}\ln(x) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3}{2}x - \left(x\ln x + \dfrac{x}{2}\right) = x - x\ln x = f(x)$

F est une primitive de f sur $[0,5\,;\,3,5]$

b. On considère l'intégrale K définie par :

$$K = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Calculons K

$$K = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{3}{4}\mathrm{e}^2 - \frac{\mathrm{e}^2}{2}\ln(\mathrm{e}) - \frac{3}{4} \times 1^2 + \frac{1^2}{2}\ln(1) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 - \frac{3}{4} = \frac{\mathrm{e}^2 - 3}{4}$$

Donnons une valeur approchée $K \approx 1,0973$ soit au centième $1,10$.

c. On considère la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$, $x = \mathrm{e}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

La fonction f étant positive sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$, l'aire de la partie de plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est en unités d'aire $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$ c'est-à-dire K.

On désigne par A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de cette partie du plan.

Donnons une valeur arrondie au centième de A en cm^2.

$A = K u.a. = 1,0973 \times 4 = 4,389\,\mathrm{cm}^2$ soit au centième $4,39\,\mathrm{cm}^2$.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1
Partie A
Question 1 : tableau d'effectifs

	Le loisir préféré est la lecture	Le loisir préféré n'est pas la lecture	Total
Nombre de filles	2	2	4
Nombre de garçons	1	4	5
Total	3	6	9

Exercice 2
Question 2.b.

Note proposée par Luc	DO	DO#	RÉ	RÉ#	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI
n repéré par Émilie	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m calculé par Émilie	1	6	11	4	9	2	7	0	5	10	3	8
Note jouée par Émilie	DO#	FA#	SI	MI	LA	RÉ	SOL	DO	FA	LA#	RÉ#	SOL#

Exercice 3
Partie B[1]
Question 1 : tableau de valeurs (valeurs arrondies au **centième**)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-1{,}72$	1	2,10	2,08	1,75	1,44

1. Le texte original donnait **Partie A**