Corrigé du baccalauréat TMD
Métropole juin 2003

EXERCICE **7 points**

1. En utilisant ce graphique :

a. On lit :

- $f(-2) = 8$ (ordonnée de B) ;
- $f(-1) \approx 6$.

b. $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.

c.

x	-3		0		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -2 est le nombre dérivé $f'(-2)$.

Ce coefficient directeur est égal à $\dfrac{12-8}{0-(-2)} = 2$.

Donc $f'(-2) = 2$.

2. a. Avec A : -2 a pour image 8, donc $8 = -8a + 4b - 2c + d$;
Avec O : 0 a pour image 0, donc $0 = d$;
2 a pour image 0, donc $0 = 8a + 4b + 2c + d$;
-3 a pour image 0, donc $0 = -27a + 9b - 3c + d$.
Conclusion a, b, c, d sont des réels qui vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -27a+9b-3c+d & = & 0 \\ d & = & 0 \\ 8a+4b+2c+d & = & 0 \\ -8a+4b-2c+d & = & 8 \end{array}\right.$$

b. On a donc $d = 0$, d'où :

$\left\{\begin{array}{rcl} -27a+9b-3c & = & 0 \\ 8a+4b+2c & = & 0 \\ -8a+4b-2c & = & 8 \end{array}\right.$ soit en ajoutant les deux dernières équations $\iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} -27a+9b-3c & = & 0 \\ 8a+4b+2c & = & 0 \\ 8b & = & 8 \end{array}\right.$ d'où $b = 1$. Il reste $\left\{\begin{array}{rcl} -27a+9-3c & = & 0 \\ 8a+4+2c & = & 0 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} -9a+3-c & = & 0 \\ 4a+2+c & = & 0 \end{array}\right.$ d'où en ajoutant $-5a+5 = 0 \iff a = 1$ d'où on déduit $c = 3 - 9a = 3 - 9 = -6$.

Conclusion : pour $x \in [-3~;~2]$, $\quad f(x) = x^3 + x^2 - 6x$.

PROBLÈME **13 points**

I.

$$g(x) = x - \mathrm{e}^x.$$

1. a. On a $g'(x) = 1 - \mathrm{e}^x$.

b. • $1 - e^x > 0 \iff 1 > e^x \iff 0 > x$ (par croissance de la fonction logarithme népérien).

• $1 - e^x < 0 \iff 1 < e^x \iff 0 < x$ (par croissance de la fonction logarithme népérien).

• $1 - e^x = 0 \iff 1 = e^x \iff 0 = x$ (par croissance de la fonction logarithme népérien).

2. De la question précédente on déduit que la fonction g est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. $g(0) = 0 - e^0 = -1$ est le maximum de la fonction.

a. $g(0) = 0 - e^0 = -1$ est le maximum de la fonction.

b. Puisque le maximum est inférieur à zéro, on en déduit que $g(x) < 0$ quel que soit le réel x.

II.

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - e^x,$$

1. a. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b. Pour $x \neq 0$, on peut factoriser x^2 :

$f(x) = x^2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{e^x}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ entraîne que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2} - e^x = -\infty$ et enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

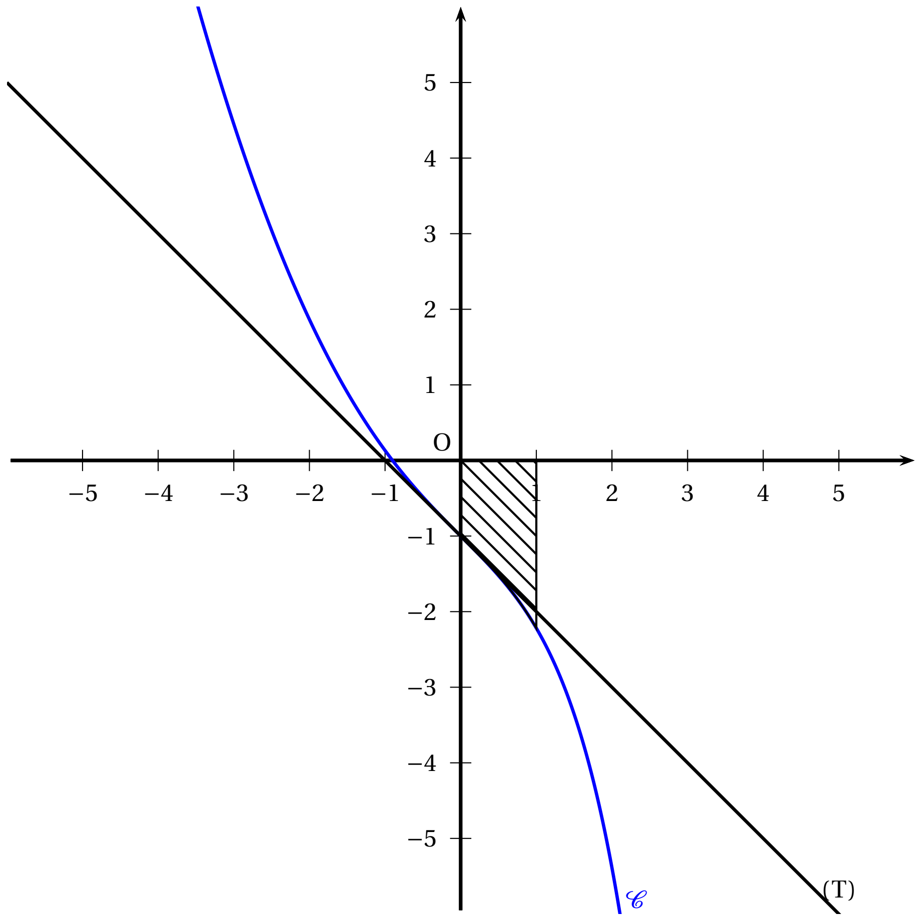
2. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{2x}{2} - e^x = x - e^x = g(x)$.

b. On a vu dans la partie I que $g(x) < 0$ pour tout réel x, donc $f'(x) < 0$ qui montre que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ de plus l'infini à moins l'infini.

3. a. Le coefficient directeur de la droite (T) tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 est égal à $f'(0) = g(0) = -1$.

b.



4. a. Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ est $x \longmapsto \dfrac{x^3}{6}$ et une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^x$, donc une primitive de la fonction f est la fonction définie par $x \longmapsto \dfrac{x^3}{6} - \mathrm{e}^x$.

b. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{6} - \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \dfrac{1^3}{6} - \mathrm{e}^1 - \left(\dfrac{0^3}{6} - \mathrm{e}^0\right) = \dfrac{1}{6} - \mathrm{e} + 1 = \dfrac{7}{6} - \mathrm{e} \approx -1,551$, soit $-1,55$ au centième près. (ce que l'on peut vérifier sur le graphique)