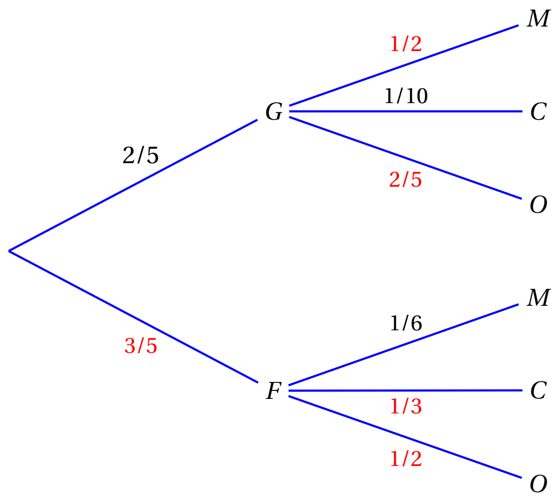
~ Corrigé du baccalauréat Groupements I-II-III-IV 15 juin 2016 ~
Technique de la musique et de la danse

EXERCICE 1 **(7 points)**

1. L'événement F est l'événement contraire de l'événement G donc $p(F) = 1 - p(G) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$.
2. On complète l'arbre de probabilités modélisant la situation étudiée :



3. L'événement $G \cap C$ est « l'élève est un garçon inscrit à la chorale ».
$p(G \cap C) = p(G) \times p_G(C) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{25}$
4. D'après la formule des probabilités totales :
$p(C) = p(G \cap C) + p(F \cap C) = \dfrac{1}{25} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{25} + \dfrac{5}{25} = \dfrac{6}{25}$
5. $p_C(G) = \dfrac{p(G \cap C)}{p(C)} = \dfrac{\frac{1}{25}}{\frac{6}{25}} = \dfrac{1}{25} \times \dfrac{25}{6} = \dfrac{1}{6}$
6. L'événement « l'élève choisi est une fille sachant qu'il fait partie de la chorale » est l'événement contraire de « l'élève choisi est un garçon sachant qu'il fait partie de la chorale ».
Donc $p_C(F) = 1 - p_C(G) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

EXERCICE 2 **(6 points)**

1. L'intensité I d'une sonnerie de téléphone est telle que $I = I_0 \times 10^7$.
Le niveau sonore correspondant est :
$N(I) = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 10\log\left(\dfrac{I_0 \times 10^7}{I_0}\right) == 10\log\left(10^7\right) = 10 \times 7 = 70$ décibels.
2. Pour l'oreille humaine, le seuil de la douleur est situé à 130 dB.
On cherche donc l'intensité I telle que $130 = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ donc telle que $13 = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$.
Or $13 = \log\left(10^{13}\right)$ donc $\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = \log\left(10^{13}\right)$ ce qui veut dire que $\dfrac{I}{I_0} = 10^{13}$ donc que $I = I_0 \times 10^{13}$.

3. **a.** On considère deux sons d'intensités acoustiques I_1 et I_2.

$$N(I_2)-N(I_1)=10\log\left(\frac{I_2}{I_0}\right)-10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)=10\left[\log\left(\frac{I_2}{I_0}\right)-\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)\right]=10\times\log\left(\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\right)$$

$$=10\times\log\left(\frac{I_2}{I_0}\times\frac{I_0}{I_1}\right)=10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

b. On double l'intensité acoustique, donc elle passe de I à $2I$; l'augmentation du niveau sonore est donc : $N(2I)-N(I)$.

D'après la question précédente : $N(2I)-N(I)=10\log\left(\dfrac{2I}{I}\right)=10\log(2)\approx 3$.

L'augmentation du niveau sonore est donc d'environ 3 dB.

c. Des bouchons antibruit permettent une atténuation du niveau sonore de 20 dB.

On appelle I_e l'intensité du son émis et I_p l'intensité du son perçu avec les bouchons.

On a donc $N(I_e)-N(I_p)=20$ ce qui équivaut à $10\log\left(\dfrac{I_e}{I_p}\right)=20$ ou encore $\log\left(\dfrac{I_e}{I_p}\right)=2$.

Or $2=\log\left(10^2\right)$ donc $\log\left(\dfrac{I_e}{I_p}\right)=\log\left(10^2\right)$ ce qui équivaut à $\dfrac{I_e}{I_p}=10^2$ ou encore $I_e=100I_p$.

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left[\dfrac{1}{2}\,;\,4\right]$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. On applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$: $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

b. $1-\ln(x)=0\iff 1=\ln(x)\iff \ln(\mathrm{e})=\ln(x)\iff \mathrm{e}=x\iff x=\mathrm{e}$

$1-\ln(x)>0\iff 1>\ln(x)\iff \ln(\mathrm{e})>\ln(x)\iff \mathrm{e}>x\iff x<\mathrm{e}$ car la fonction ln est strictement croissante sur I.

c. On en déduit que sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,\mathrm{e}\right[$, $f'(x)>0$ et que sur $]\mathrm{e}\,;\,4]$, $f'(x)<0$.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=2\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\approx -1,39$; $f(4)=\dfrac{\ln(4)}{4}\approx 0,35$

Le maximum de f sur I est $f(\mathrm{e})=\dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\approx 0,37$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$\frac{1}{2}$		e		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$\frac{\ln(4)}{4}$

2. **a.** La courbe $\mathscr{C}$ possède une tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point A.

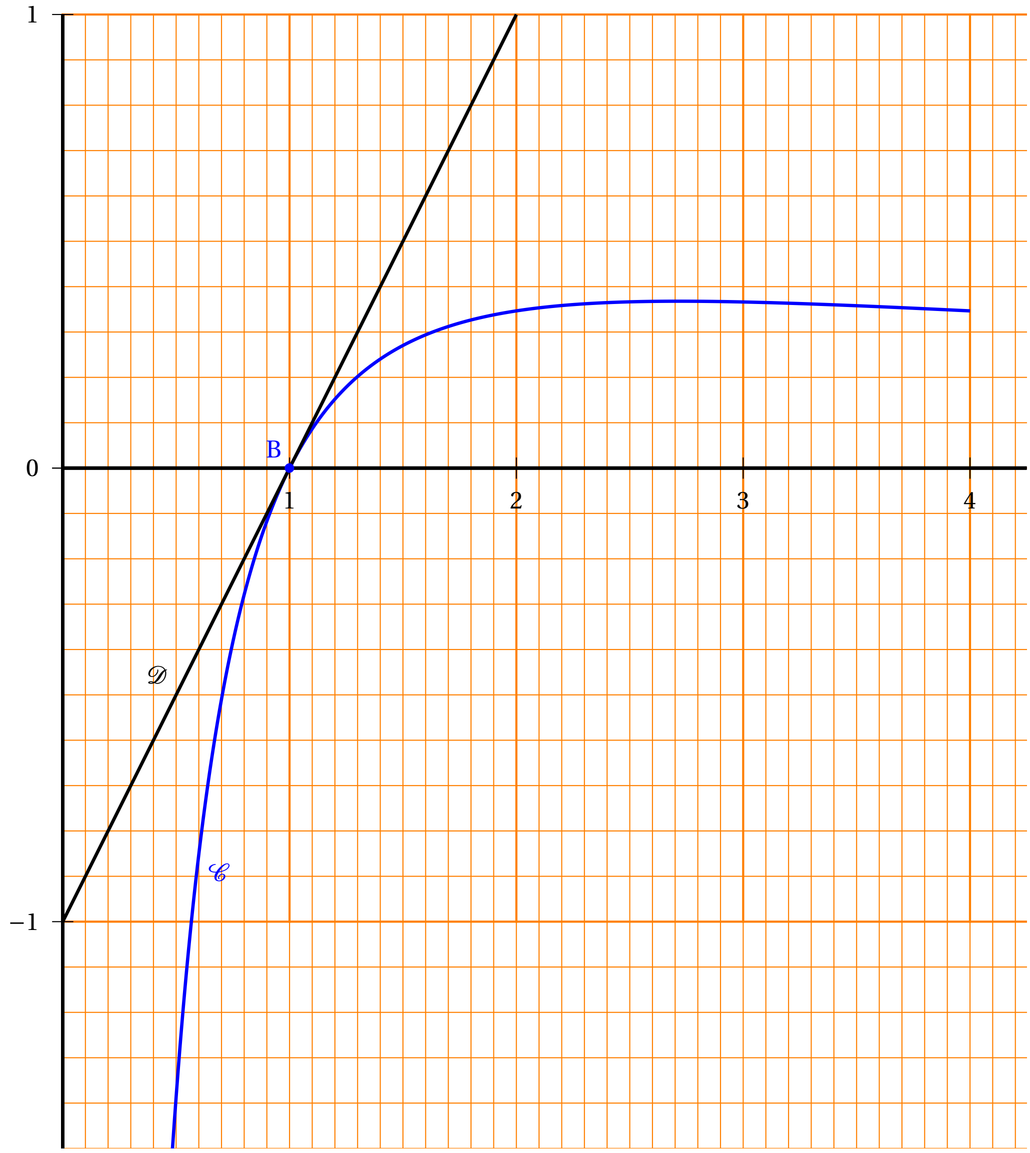
Cette tangente est au point A dont l'abscisse x_{A} vérifie $f'(x_{\mathrm{A}})=0$; donc $x_{\mathrm{A}}=\mathrm{e}$ et les coordonnées de A sont $\left(\mathrm{e}\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

b. On appelle B le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.
On appelle $\mathscr{D}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B.
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
$f(1) = \dfrac{\ln(1)}{1} = 0$; $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x}$ donc $f'(1) = \dfrac{1-\ln(1)}{1} = 1$.
$y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = 1(x-1) + 0$; la tangente $\mathscr{D}$ a donc pour équation $y = x - 1$.

3. On complète le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0,5	1	1,5	2	e	3,5	4
$f(x)$	$-1,39$	0	$0,27$	$0,35$	$0,37$	$0,36$	$0,35$

4. En prenant comme unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées, on construit dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la tangente $\mathscr{D}$.


1
0
−1
1
2
3
4
B
𝒟
𝒞

EXERCICE 4 Enseignement obligatoire (au choix) (7 points)

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $I = \left[-\dfrac{5}{2}\ ;\ 5\right]$, par $f(x) = \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x}$.

1. $f(-1) = \dfrac{-1+2}{\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}$ et $f(1) = \dfrac{1+2}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{3}{\mathrm{e}}$

2. On résout l'équation $f(x) = 0$: $f(x) = 0 \iff \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} = 0 \iff x = -2$.

$-2 \in I$ donc la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans I est $x = -2$.

3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

a. On applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$: $f'(x) = \dfrac{1 \times \mathrm{e}^x - (x+2) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(-1-x)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{-x-1}{\mathrm{e}^x}$

b. Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$.

$f'(x) > 0 \iff -x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$

$f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{-\frac{5}{2}+2}{\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}} \approx -6{,}09$; $f(-1) = \mathrm{e} \approx 2{,}72$; $f(5) = \dfrac{5+2}{\mathrm{e}^5} = \dfrac{7}{\mathrm{e}^5} \approx 0{,}047$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I :

x	$-\frac{5}{2}$		-1		5
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\frac{7}{\mathrm{e}^5}$

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle I, par : $F(x) = \dfrac{-x-3}{\mathrm{e}^x}$.

a. Pour démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, on calcule $F'(x)$:

$F'(x) = \dfrac{-1 \times \mathrm{e}^x - (-x-3) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(-1+x+3)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x+2)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} = f(x)$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur I.

b. Par définition de la primitive : $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = F(0) - F(-2) = \dfrac{-3}{\mathrm{e}^0} - \dfrac{-1}{\mathrm{e}^{-2}} = -3 + \mathrm{e}^2 \approx 4{,}39$

c. On considère la partie du plan délimitée d'une part par l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -2$, d'autre part par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, et contenant le point de coordonnées $(-1\ ,\ 1)$.

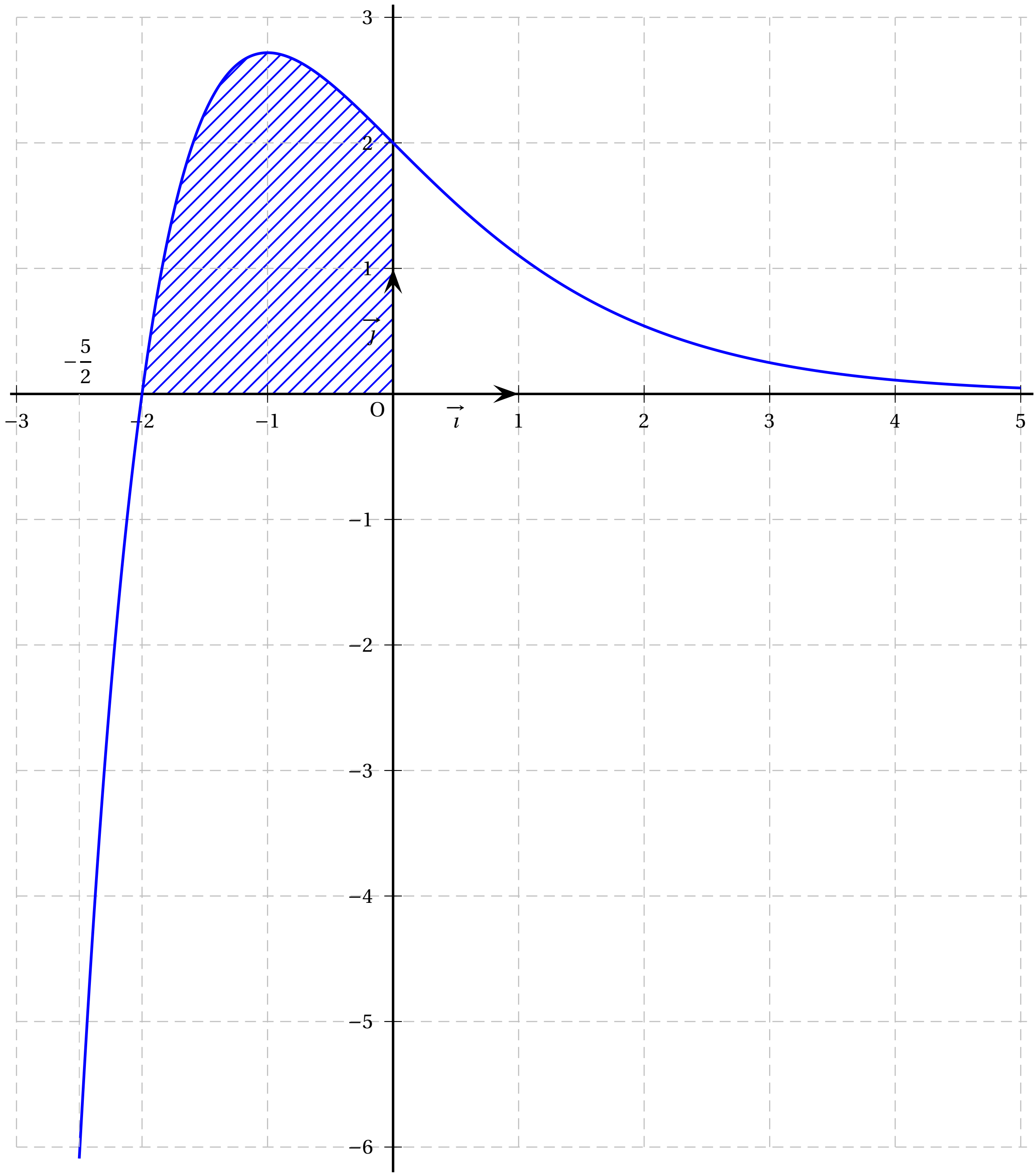
Voir figure page suivante.

d. Soit A la mesure, en cm^2, de l'aire de cette partie du plan.

La fonction f est positive sur $[-2\ ;\ 0]$ donc $A = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^2 - 3$ unités d'aire.

Les unités en abscisse et en ordonnée sont de 2 cm donc une unité d'aire vaut 4 cm^2.

Donc $A = 4\left(\mathrm{e}^2 - 3\right) \approx 17{,}56$ cm^2.



Rappel : $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormal d'unité 2 cm.