Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse
∽ Métropole septembre 2010 ∾

EXERCICE 1 — 6 points

1. Dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, la courbe d'équation $y = \ln x$
   a. $\boxed{\text{n'a pas de point d'abscisse négative ou nulle.}}$
   b. n'a pas de point d'ordonnée négative ou nulle.
   c. admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

   La fonction ln est définie sur $]0~;~+\infty[$.

2. Dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$, l'équation $\ln x = -5$ a pour solution :

   a. -5e^5 **b.** $\boxed{\dfrac{1}{\text{e}^5}}$ **c.** $\text{e}^{\frac{1}{5}}$

   $\ln x = -5 \iff x = \text{e}^{-5} \iff x = \dfrac{1}{\text{e}^5}$

3. Dans l'ensemble **R** des nombres réels, l'inéquation $\text{e}^x + 3 > 0$:
   a. n'admet aucune solution.
   b. admet une et une seule solution.
   c. $\boxed{\text{admet tout réel } x \text{ pour solution.}}$

   Pour tout x, $\text{e}^x > 0$ donc $\text{e}^x + 3 > 0$; l'équation a donc pour solution tout réel x.

4. On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (x+1)\,\text{e}^x$.
   Sa fonction dérivée f' est donnée par :

   a. $f'(x) = \text{e}^x$ **b.** $f'(x) = x\text{e}^x$ **c.** $\boxed{f'(x) = (x+2)\,\text{e}^x}$

   $f'(x) = 1 \times \text{e}^x + (x+1) \times \text{e}^x = (x+2)\,\text{e}^x$

5. La fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x$ admet un maximum au point d'abscisse :
   a. 0 **b.** $\boxed{2}$ **c.** e

   $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{2-x}{x}$ donc $f'(x)$ passe de positive à négative pour $x = 2$.

6. Dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, la courbe d'équation $y = \sin x$ admet une tangente au point O dont le coefficient directeur est égal à :

   a. 0 **b.** $\boxed{1}$ **c.** -1

   La dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus ; donc la tangente à la courbe représentant la fonction sinus au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\cos(0) = 1$.

EXERCICE 2 — 7 points

1. On sait que l'intervalle entre les notes LA$_3$ et MI$_4$ est de sept demi-tons (ce qui correspond en musique à une quinte).

a. La suite des fréquences forme une suite géométrique de raison $q = 2^{\frac{1}{12}}$; il y a 7 demi-tons entre LA$_3$ et MI$_4$ donc la fréquence de la note MI$_4$ est $440 \times q^7 = 440 \times 2^{\frac{7}{12}} \approx 659$ Hz.

b. La différence de hauteur des notes LA$_3$ et MI$_4$ est $1\,000 \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right) = 1\,000 \log\left(\dfrac{659}{440}\right) \approx 175,43$ savarts.

Remarque

Si on calcule cette différence de hauteur en prenant $f_1 = 440$ et $f_2 = 440 \times 2^{\frac{7}{12}}$, on trouve 175,60 savarts ; on peut donc s'étonner que le sujet demande une réponse au centième.

2. a. Le LA$_2$ est situé 12 demi-tons en dessous du LA$_3$ donc sa fréquence est la moitié de celle du LA$_3$ donc 220 Hz.

Le LA$_4$ est situé 12 demi-tons au dessus du LA$_3$ donc sa fréquence est le double de celle du LA$_3$ donc 880 Hz.

b. La différence de hauteur entre les notes LA$_3$ et LA$_4$ est $1\,000 \log\left(\dfrac{880}{440}\right) = 1\,000 \log(2) \approx 301,03$ savarts.

3. La différence de hauteur entre deux notes de fréquences respectives f_1 et f_2 (avec $f_2 \geqslant f_1$) est égale à 100,34 savarts.

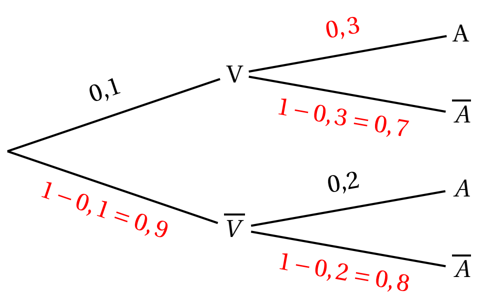
a. On a donc $1\,000 \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right) = 100,34 \iff \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right) = 0,10034 \iff \dfrac{f_2}{f_1} = 10^{0,10034} \iff \dfrac{f_2}{f_1} \approx 1,26$.

b. $\dfrac{f_2}{f_1} \approx 1,26$ donc on cherche un nombre entier n tel que $1,26 = q^n$ ou encore

$1,26 = 2^{\frac{n}{12}} \iff \log(1,26) = \log\left(2^{\frac{n}{12}}\right) \iff \log(1,26) = \dfrac{n}{12}\log(2) \iff 12\,\dfrac{\log(1,26)}{\log(2)} = n \iff n \approx 4.$

EXERCICE 3 — Enseignement obligatoire (au choix) — 7 points

1. On complète l'arbre de probabilités suivant qui correspond à cette situation :



2. a. La probabilité que le client ait acheté un violon et un archet est :

$p(V \cap A) = p(V) \times p_V(A) = 0,1 \times 0,3 = 0,03.$

b. La probabilité que le client n'ait rien acheté est

$p(\overline{V} \cap \overline{A}) = p(\overline{V}) \times p_{\overline{V}}(\overline{A}) = 0,9 \times 0,8 = 0,72.$

c. L'événement « le client a acheté au moins un des deux objets » est l'événement contraire de « le client a acheté les deux objets ou le client n'a rien acheté » ; donc la probabilité de cet févénement est :

$p = 1 - \left(p(V \cap A) + p(\overline{V} \cap \overline{A})\right) = 1 - (0,03 + 0,72) = 1 - 0,75 = 0,25.$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$p(A) = p(V \cap A) + p(\overline{V} \cap A) = 0,03 + 0,9 \times 0,2 = 0,03 + 0,18 = 0,21.$

4. La probabilité que le client ait acheté un violon sachant qu'il a acheté un archet est :

$p_A(V) = \dfrac{p(V \cap A)}{p(A)} = \dfrac{0,03}{0,21} = \dfrac{1}{7} \approx 0,14.$

EXERCICE 4 — Enseignement renforcé (au choix) — 7 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\,;\ 4]$ par $f(x) = (3-x)\ln x$.
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.

1. a. $f(\text{e}) = (3-\text{e})\ln \text{e} = 3 - \text{e} \approx 0,28$

b. $f(x) = 0 \iff (3-x)\ln x = 0 \iff 3 - x = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = 1$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0,5\,;\ 4]$ sont $x = 1$ et $x = 3$.

c. Parmi les trois courbes proposées en annexe, une seule représente la fonction f.

On a vu que $x = 3$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$, donc $f(3) = 0$ et donc la courbe représentant la fonction f doit passer par le point de coordonnées $(3\,;\ 0)$. Cela permet d'éliminer la courbe 1.

L'image par la fonction représentée par la courbe 2 du nombre e est négative ; donc la courbe 2 est à éliminer.

La fonction f est donc représentée par la courbe 3.

2. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,4]$ par $F(x) = \left(3x - \dfrac{1}{2}x^2\right)\ln x + \dfrac{1}{4}x^2 - 3x$.

a. $F'(x) = \left(3 - \dfrac{1}{2} \times 2x\right)\ln x + \left(3x - \dfrac{1}{2}x^2\right) \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{4} \times 2x - 3 = (3-x)\ln x + 3 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x - 3 = (3-x)\ln x$

b. $F'(x) = (3-x)\ln x = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle $[0,5\,;\ 4]$.

c. D'après le cours

$$I = \int_1^3 (3-x)\ln x\,\text{d}x = F(3) - F(1) = \left[\left(3 \times 3 - \dfrac{1}{2} \times 3^2\right)\ln 3 + \dfrac{1}{4} \times 3^2 - 3 \times 3\right] - \left[\left(3 - \dfrac{1}{2}\right)\ln 1 + \dfrac{1}{4} - 3\right]$$
$$= \left[\left(9 - \dfrac{9}{2}\right)\ln 3 + \dfrac{9}{4} - 9\right] - \left[\dfrac{1}{4} - 3\right] = \dfrac{9}{2}\ln 3 - \dfrac{27}{4} + \dfrac{11}{4} = \dfrac{9}{2}\ln 3 - 4 \approx 0,94$$

d. On désigne par $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

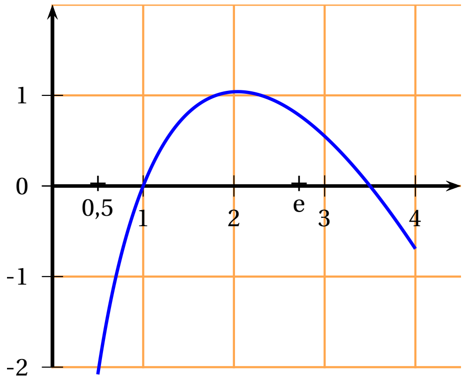
La fonction f est positive sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ donc $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x = I$ unités d'aires.

L'unité sur chaque axe est de 2 cm donc l'unité d'aire vaut 4 cm^2.

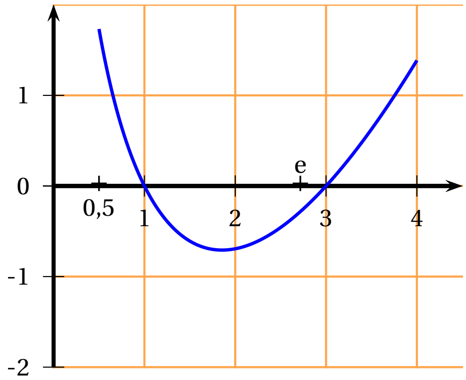
$\mathscr{A} = \left(\dfrac{9}{2}\ln 3 - 4\right) \times 4 \approx 3,78 \text{ cm}^2.$

EXERCICE 4 : ANNEXE

Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3