# Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse

## Métropole septembre 2006

## EXERCICE 1 — 6 points

| | Question | Réponse A | Réponse B | Réponse C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le nombre réel $\ln\left(\text{e}^3\right)-\ln\left(\frac{1}{\text{e}^2}\right)+2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\text{e}}}\right)$ est égal à : | 2 | $\sqrt{\text{e}}$ | $\boxed{4}$ |
| 2 | L'équation $\ln\left(x^2\right)=0$ a pour solution(s) dans $\mathbf{R}$ : | 0 | e | $\boxed{-1 \text{ et } 1}$ |
| 3 | Une valeur approchée à l'unité près de $\ln\left(2^{10\,000}\right)$ est : | $\boxed{6\,931}$ | 693 | 69 315 |
| 4 | La dérivée $g'$ de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=x(\ln x-1)$, est définie par : | $\boxed{g'(x)=\ln x}$ | $g'(x)=\frac{1}{x}-1$ | $g'(x)=\ln x-1$ |
| 5 | Dans un repère, une équation de la tangente au point d'abscisse e à la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=x+\ln x$ est : | $y=x+\text{e}+1$ | $y=(1+\text{e})x$ | $\boxed{y=\left(1+\frac{1}{\text{e}}\right)x}$ |
| 6 | La fonction $f$ étant définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 10[$ par $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$, on peut affirmer que : | L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]0\ ;\ 10[$ | La fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ 10[$ | $\boxed{\text{La fonction } f' \text{ dérivée de la fonction } f \text{ s'annule une fois en changeant de signe sur l'intervalle } ]0\ ;\ 10[}$ |

### Explications

1. $\ln\left(\text{e}^3\right)-\ln\left(\frac{1}{\text{e}^2}\right)+2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\text{e}}}\right)=3-\left(-\ln(\text{e}^2)\right)+2\left(-\ln\left(\sqrt{\text{e}}\right)\right)=3+2-2\times\frac{1}{2}=4$
2. $\ln(x^2)=0 \iff x^2=1 \iff x=-1$ ou $x=1$
3. $g(x)=x\,(\ln(x)-1)$ donc $g'(x)=1\times(\ln(x)-1)+x\times\frac{1}{x}=\ln(x)-1+1=\ln(x)$
4. La tangente a pour équation $y=f'(\text{e})(x-\text{e})+f(\text{e})$.
   $f(x)=x+\ln(x)$ donc $f(\text{e})=\text{e}+\ln(\text{e})=\text{e}+1$
   $f(x)=x+\ln(x)$ donc $f'(x)=1+\frac{1}{x}$ donc $f'(\text{e})=1+\frac{1}{\text{e}}$
   La tangente a pour équation $y=\left(1+\frac{1}{\text{e}}\right)(x-\text{e})+\text{e}+1 \iff y=\left(1+\frac{1}{\text{e}}\right)x-\text{e}-1+\text{e}+1 \iff y=\left(1+\frac{1}{\text{e}}\right)x$
5. $f(x)=(\ln(x))^2-2\ln(x)$ donc $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)-2\times\frac{1}{x}=\frac{2}{x}(\ln(x)-1)$ s'annule et change de signe pour $\ln(x)-1=0$ donc pour $x=\text{e}$.

## EXERCICE 2 8 points

On enregistre un son correspondant à une certaine note de musique. Ce son est analysé à l'oscilloscope.
La courbe obtenue est celle d'une fonction périodique $g$ de variable $t$, où $t$ est le temps exprimé en millisecondes.

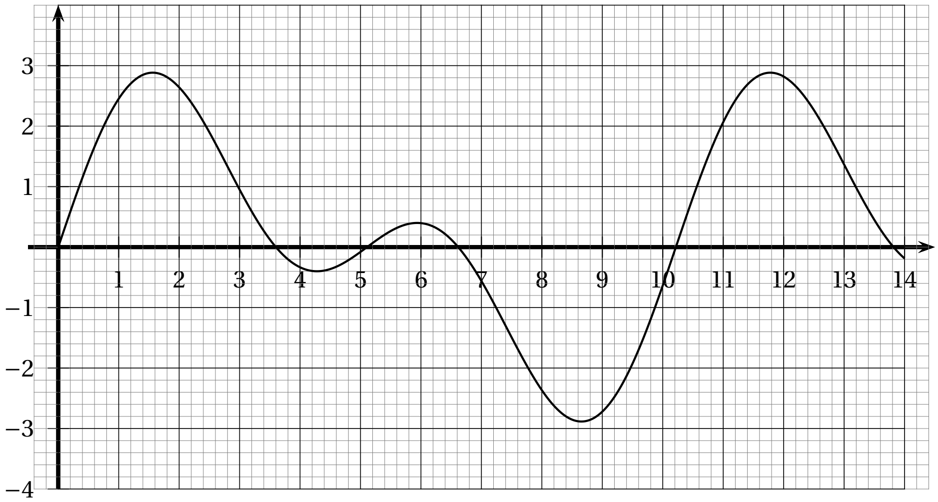
**A.** On utilise le graphique pour répondre aux questions suivantes.

1. On désigne par $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0~;~14]$.
   - **a.** La fonction $g$ est décroissante sur l'intervalle $[2~;~4]$ donc la fonction dérivée $g'$ est négative sur cet intervalle.
   - **b.** La fonction $g$ est croissante sur l'intervalle $[9~;~11]$ donc la fonction dérivée $g'$ est positive sur cet intervalle.
2. **a.** La courbe représentant la fonction $g$ coupe 3 fois l'axe des abscisses entre $x = 1$ et $x = 10$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet 3 solutions sur l'intervalle $[1~;~10]$.
   - **b.** Une valeur approchée à 0,2 ms de la solution qui appartient à l'intervalle $[3~;~4]$ est 3,6.

**B.** On sait que la période $T$, exprimée en ms, de la fonction $g$ est comprise entre 0 et 14.

1. D'après le graphique, on voit que $g(x + 10{,}2) = g(x)$ donc la période $T$ de la fonction $g$ est 10,2 ms.
2. La période est de $10{,}2 \times 10^{-3}$ seconde.
   On sait que $f = \dfrac{1}{T}$ donc $f = \dfrac{1}{10{,}2 \times 10^{-3}} \approx 98$ Hz.
3. En utilisant le document 2, on déduit que la note jouée est le SOL de l'octave 1.

**Document 1 :** Graphique de la fonction $g$ pour $t \in [0~;~14]$ : en abscisse, une unité correspond à 1 ms, c'est-à-dire 0,001 seconde

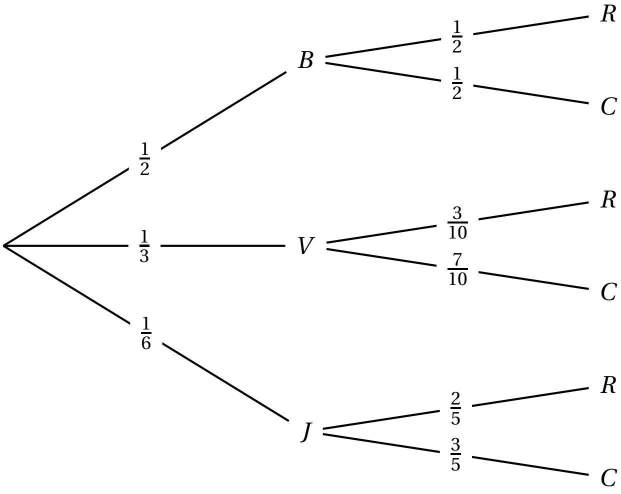


**Document 2 :** Fréquence en hertz des notes de la gamme tempérée, arrondie à 1 hertz

| | DO | RE | MI | FA | SOL | LA | SI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Octave 0 | 33 | 37 | 41 | 44 | 49 | 55 | 62 |
| Octave 1 | 65 | 73 | 82 | 87 | 98 | 110 | 123 |
| Octave 2 | 131 | 147 | 165 | 175 | 196 | 220 | 247 |
| Octave 3 | 262 | 294 | 330 | 349 | 392 | 440 | 494 |
| Octave 4 | 523 | 587 | 659 | 698 | 784 | 880 | 988 |

## EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 6 points

1. La probabilité pour que le jeton tiré soit jaune est $P(J) = 1 - P(B) - P(V) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.
2. On donne un arbre de probabilités correspondant à la situation décrite par l'énoncé :



3. **a.** D'après la formule des probabilités totales :
$P(R) = P(B \cap R) + P(V \cap R) + P(J \cap R) = P(B) \times P_B(R) + P(V) \times P_V(R) + P(J) \times P_J(R)$
$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{5}{12}$.
   **b.** Si le jeton n'est ni blanc ni carré, il peut être vert et rond, ou jaune et rond.
   La probabilité cherchée est donc : $P(V \cap R) + P(J \cap R) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{6}$.
4. Sachant que le jeton tiré est rond, la probabilité qu'il soit jaune est :
$P_R(J) = \dfrac{P(J \cap R)}{P(R)} = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{1}{15} \times \dfrac{12}{5} = \dfrac{4}{25}$.

## EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) 6 points

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x+1}$.

1. On trace la droite $\Delta$ au moyen des points :

| $x$ | 1 | 5 |
|---|---|---|
| $y = x - 1$ | 0 | 4 |

2. On désigne par $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

   **a.** $f'(x) = 1 + \dfrac{-4 \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 1 - 4}{(x+1)^2}$
   Or $(x-1)(x+3) = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3$.
   Donc sur $]-1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

**b.** On étudie le signe de la fonction $f'$ sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ :

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+3$ | | $+$ | | $+$ | |
| $(x+1)^2$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**c.** $f(1)=1-1+\dfrac{4}{1+1}=2$ ; on peut dresser le tableau de variations de $f$ sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ :

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ | ↘ | $2$ | ↗ | |

**3.** On considère le domaine plan délimité par les droites d'équations $x=1$ et $x=3$, la droite $\Delta$ et la courbe $\mathscr{C}$.

**a.** Voir figure.

**b.** Soit $H$ la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $H(x)=4\ln(x+1)$.

$H'(x)=4\times\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{4}{x+1}$ donc la fonction $H$ est une primitive de la fonction $x\longmapsto\dfrac{4}{x+1}$ sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

**c.** Soit $g$ la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=x-1$.

Sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$, $f(x)>g(x)$ donc la fonction $f-g$ est positive.

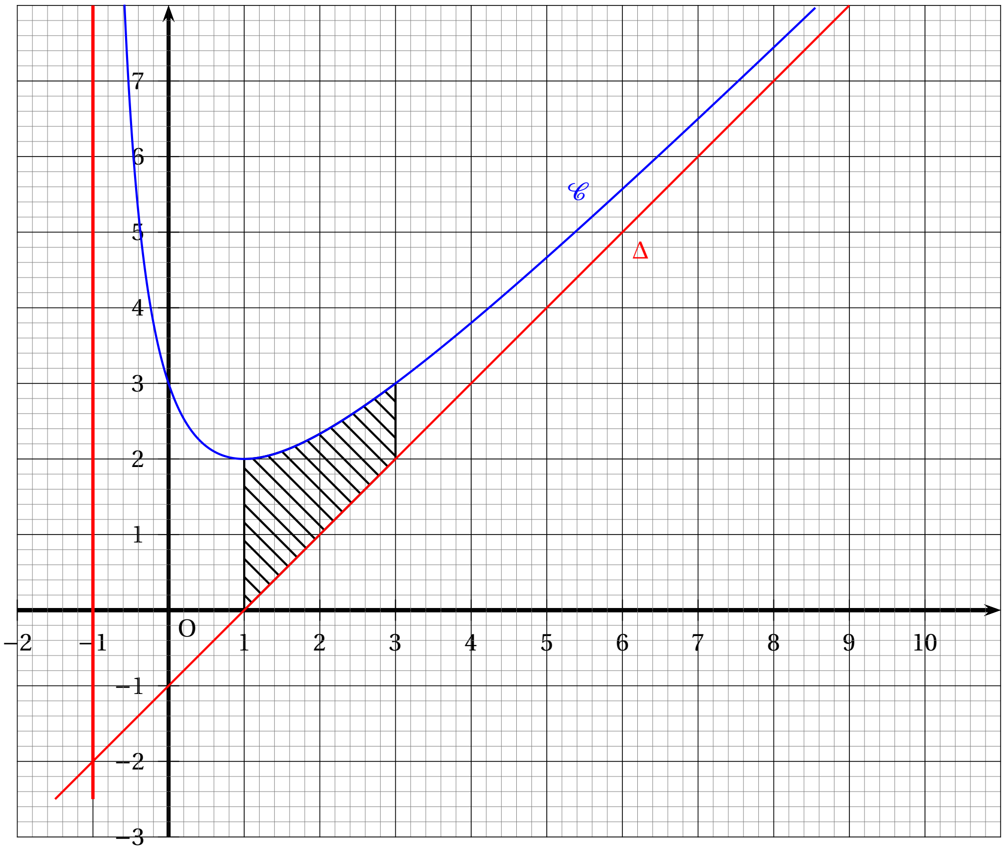
D'après le cours, on peut dire alors que :

$\mathscr{A}=\displaystyle\int_1^3(f-g)(x)\,\mathrm{d}x$ donc $\mathscr{A}=\displaystyle\int_1^3 f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^3 x-1+\frac{4}{x+1}-(x-1)\,\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{4}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

L'unité graphique est de 1 cm sur chaque axe, donc l'unité d'aire est de 1 cm$^2$.

On peut donc dire que la mesure $\mathscr{A}$, exprimée en cm $^2$ est $\displaystyle\int_1^3\frac{4}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

On a vu que $H'(x)=\dfrac{4}{x+1}$ donc $\mathscr{A}=H(3)-H(1)=4\ln(4)-4\ln(2)=4\ln\left(\dfrac{4}{2}\right)=4\ln(2)$ cm$^2$.


𝒞
Δ
O
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7