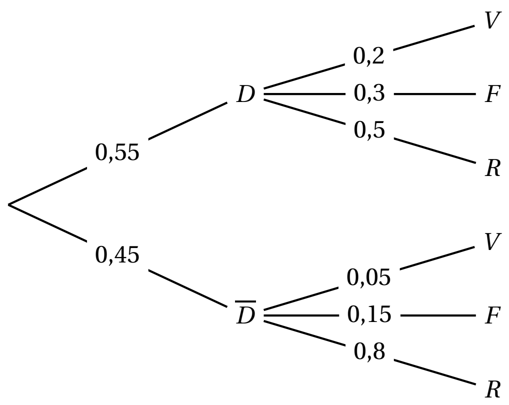
# ∽ Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse ∾ Métropole septembre 2007

## EXERCICE 1 — 7 points

1. On sait que 55 % des étudiants possèdent un ordinateur donc 45 % n'en possèdent pas : $P(\overline{D}) = 0{,}45$.
2. On complète l'arbre de probabilités suivant, correspondant à la situation décrite par l'énoncé :




3. **a.** L'évènement « l'étudiant a un ordinateur et un violon » est $D \cap V$ :
   $P(D \cap V) = P(D) \times P_D(V) = 0{,}55 \times 0{,}2 = 0{,}11$.

   **b.** L'évènement « l'étudiant a un violon et n'a pas d'ordinateur » est $\overline{D} \cap V$ :
   $P(\overline{D} \cap V) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(V) = 0{,}45 \times 0{,}05 = 0{,}022\,5$.

   **c.** D'après la formule des probabilités totales :
   $P(V) = P(D \cap V) + P(\overline{D} \cap V) = 0{,}11 + 0{,}022\,5 = 0{,}132\,5$.
4. La probabilité de l'évènement « l'étudiant a un ordinateur » sachant qu'il a un violon est :
   $P_V(D) = \dfrac{P(D \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}11}{1{,}132\,5} \approx 0{,}83$.

## EXERCICE 2 — 6 points

1. Soit T le nombre réel tel que : $5^{4\,000} = 10^{\mathrm{T}}$. Alors on peut affirmer que :

   **a.** $\ln \mathrm{T} = f4\,000 \ln 5 - \ln 10$  **b.** $\boxed{\log 5 = \dfrac{\mathrm{T}}{4\,000}}$  **c.** $\mathrm{T} = 2\,000$

   $5^{4\,000} = 10^{\mathrm{T}} \iff \log\left(5^{4\,000}\right) = \log\left(10^{\mathrm{T}}\right) \iff 4\,000 \log 5 = \mathrm{T} \log(10) \iff \log 5 = \dfrac{\mathrm{T}}{4\,000}$ car $\log 10 = 1$.
2. On rappelle que, dans la gamme de tempérament égal :
   — l'octave est divisée en douze demi-tons égaux séparant les notes, si bien que la suite des fréquences des notes est géométrique de raison $q$ où $q$ est un nombre réel positif tel que $q^{12} = 2$.
   — une quarte juste contient cinq demi-tons.

Dans cette gamme, le rapport des fréquences correspondant à une quarte juste ascendante est :

**a.** égal à $\dfrac{4}{3}$ **b.** inférieur à $\dfrac{4}{3}$ **c.** $\boxed{\text{égal à } 2^{\frac{5}{12}}}$

Une quarte juste correspond à 5 demi-tons donc le rapport de fréquences est de $2^{\frac{5}{12}}$.

**3.** La somme d'une fonction sinusoïdale de fréquence 400 Hz et d'une fonction sinusoïdale de fréquence 800 Hz, est :

**a.** non périodique

**b.** périodique de fréquence 1 200 Hz

**c.** $\boxed{\text{périodique de fréquence 400 Hz}}$

Une fonction $f$ périodique de fréquence 400 Hz a une période de $\dfrac{1}{400}$ donc, pour tout entier relatif $k$, $f\left(x+\dfrac{k}{400}\right)=f(x)$.

Une fonction $g$ périodique de fréquence 1 200 Hz a une période de $\dfrac{1}{1200}$ donc, pour tout entier relatif $k$, $g\left(x+\dfrac{k}{1200}\right)=g(x)$. En particulier, $g\left(x+\dfrac{3}{1200}\right)=g(x)$ autrement dit $g\left(x+\dfrac{1}{400}\right)=g(x)$.

On déduit que, pour tout $x$, $(f+g)\left(x+\dfrac{1}{400}\right)=f\left(x+\dfrac{1}{400}\right)+g\left(x+\dfrac{1}{400}\right)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$.

Donc la fonction $f+g$ est périodique de période $\dfrac{1}{400}$ donc de fréquence 400 Hz.

**4.** On rappelle que :

Si $a$, $b$ et $c$ sont des entiers naturels, « $a$ congru à $b$ modulo $c$ » s'écrit : $a \equiv b$ (modulo $c$).

L'équation $7n \equiv 11$ (modulo 12) d'inconnue $n$, entier compris entre 0 et 6 :

**a.** $\boxed{\text{a une solution et une seule}}$ **b.** n'a aucune solution **c.** a deux solutions

| $n =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $7n \equiv$ | 0 | 7 | 3 | 7 | 4 | 11 | 6 |

**5.** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\text{e}^{-3x+1}<\text{e}^{-2x+3}$ d'inconnue réelle $x$ est :

**a.** l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$ **b.** l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$ **c.** $\boxed{\text{l'intervalle } ]-2\,;\,+\infty[}$

$\text{e}^{-3x+1}<\text{e}^{-2x+3} \iff -3x+1<-2x+3 \iff -2<x$

**6.** On considère une échelle de fréquence logarithmique graduée de 40 à 10 000 Hz et de longueur totale 24 cm.

Sachant que de 40 Hz à 10 000 Hz, il y a entre sept et huit octaves, on peut alors affirmer que sur cette échelle :

**a.** toutes les octaves ont une « largeur » de 15 mm environ.

**b.** $\boxed{\text{toutes les octaves ont une « largeur » de 3 cm environ.}}$

**c.** l'octave $DO_4$-$DO_5$ a une « largeur » bien supérieure à l'octave $DO_3$-$DO_4$. On considère ici que la note $DO_4$ correspond à une fréquence de 520 Hz.

La fréquence de 40 Hz correspond à la graduation 0 sur l'échelle logarithmique ; de plus, $\log(40) \approx 1{,}60$.

La fréquence de 10 000 Hz correspond à la graduation 24 sur l'échelle logarithmique, et $\log(10000)=4$.

On passe d'une note à la même note de l'octave du dessus en multipliant la fréquence par 2 ; on s'intéressera donc aux fréquences 40, 80, 160, 320, 640, 1 280, 2 560, 5 160 et 10 000. Il y a donc 7 octaves plus une incomplète entre les notes de fréquences 40 Hz et 10 000 Hz.

Pour répondre à la question, on établit un tableau de proportionnalité entre les logarithmes décimaux des fréquences et les positions entre 0 et 24 cm sur l'échelle logarithmique :

| fréquence $f$ | 40 | 80 | 160 | 320 | 640 | 1 280 | 2 560 | 5 120 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log(f)$ | 1,60 | 1,90 | 2,20 | 2,51 | 2,81 | 3,11 | 3,41 | 3,71 | 4 |
| cm | 0 | 3,00 | 6,00 | 9,10 | 12,10 | 15,10 | 18,10 | 21,10 | 24 |

Toutes les octaves ont donc une largeur d'environ 3 cm sur l'échelle logarithmique.

## EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 7 points

**1.** Soit $g$ la fonction définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$.

**a.** $g'(x) = 2x + 0 - 2 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 2}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - 1\right)}{x} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$

**b.** On étudie le signe de $g'(x)$ pour tout $x$ de $]0~;~+\infty[$.

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x+1$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $g'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |

**c.** $g(1) = 1^2 + 3 - 2\ln 1 = 4$, on dresse le tableau de variations de $g$ sur $]0~;~+\infty[$ :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $\searrow$ | 4 | $\nearrow$ | |

**d.** La fonction $g$ admet le nombre 4 comme minimum sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, donc $g(x) > 0$ sur cet intervalle.

**2.** Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2\ln x}{x}$.

**a.** $f'(x) = 1 - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{2 \times \dfrac{1}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 + 3 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

**b.** Comme $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]0~;~+\infty[$.

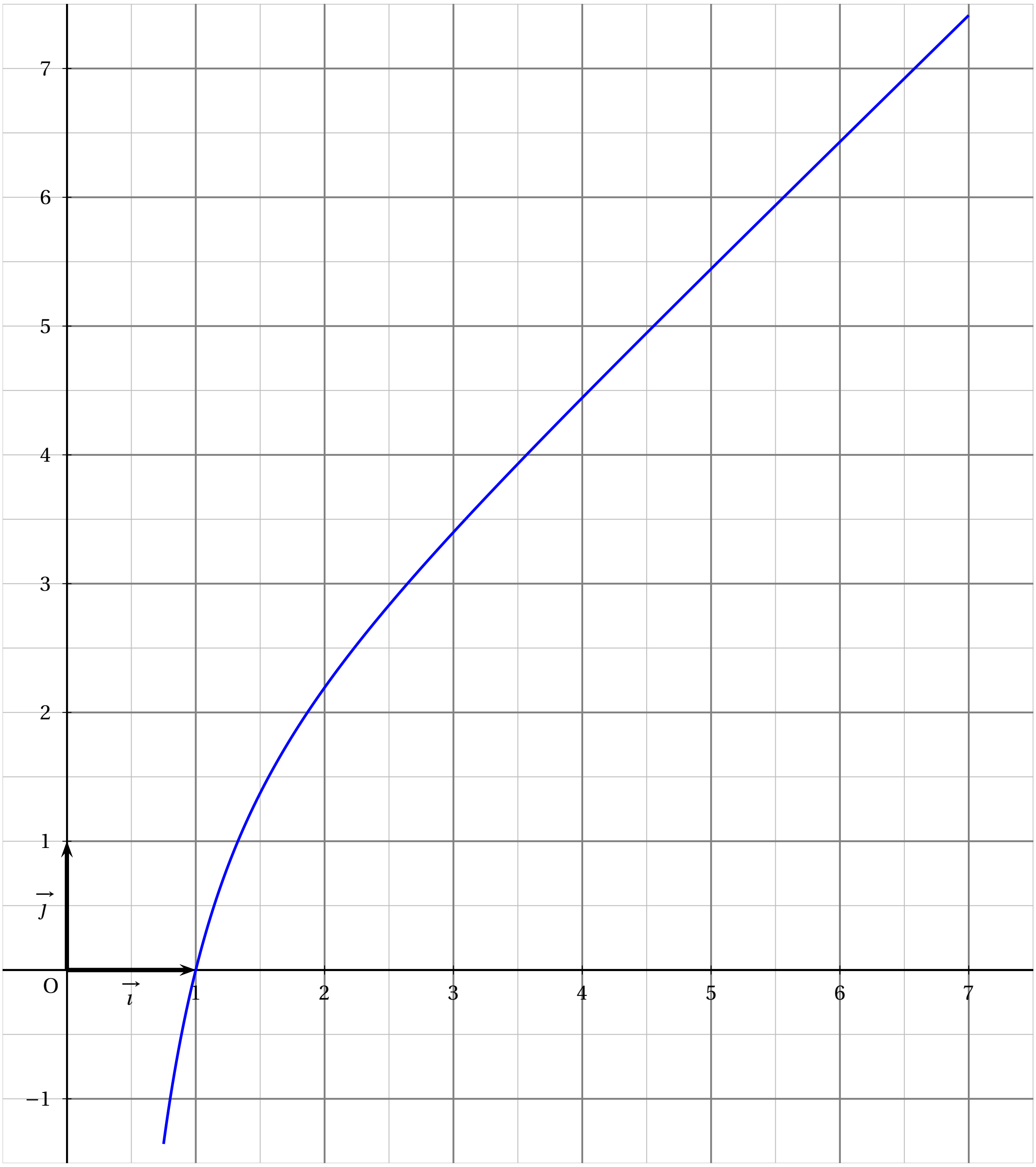
**c.** On dresse le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ :

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $\nearrow$ | |

**d.** On complète le tableau de valeurs suivant :

| $x$ | 0,75 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1{,}35$ | 0 | 1,37 | 2,19 | 3,40 | 4,44 | 5,44 | 6,43 | 7,41 |

**e.** On trace la courbe représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0{,}75\,;\ 7]$ :



## EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) 7 points

**A.** On considère la fonction $T$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ par : $T(x) = 2\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right)$.

**1.** $T\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

**2. a.** $0 \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4} \iff 0 \leqslant 2x < 2 \times \dfrac{3\pi}{4} \iff 0 \leqslant 2x < \dfrac{3\pi}{2} \iff 0 \leqslant \dfrac{2x}{3} < \dfrac{\frac{3\pi}{2}}{3} \iff 0 \leqslant \dfrac{2x}{3} < \dfrac{3\pi}{2} \times \dfrac{1}{3}$

$\iff 0 \leqslant \dfrac{2x}{3} < \dfrac{\pi}{2}$

**b.** Si $x \in \left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right[$, alors $\dfrac{2x}{3} \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On sait que si $0 \leqslant X < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos X > 0$, on en déduit que $\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) > 0$ et donc que $T(x) > 0$.

Par la suite, on admettra que si $x$ appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{3\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ alors $T(x) < 0$.

**B.** On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{2x}{3}\right)$.

**1.** $f(0) = 3\sin(0) = 0$ ; $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 3\sin\left(\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3\pi}{4}\right) = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 \times 1 = 3$

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 3\sin\left(\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3\pi}{2}\right) = 3\sin(\pi) = 0$

**2. a.** On désigne par $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

Pour tout $x$ de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 3 \times \dfrac{2}{3} \times \cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) = T(x)$.

**b.** On dresse le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ |

**C.**

**1.** Pour calculer l'intégrale $I$ définie par $I = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} 3\sin\left(\dfrac{2x}{3}\right)\,\mathrm{d}x$, il faut déterminer une primitive de la fonction $f$ ; on sait que la fonction $\sin(x)$ a pour primitive la fonction $-\cos(x)$ donc une primitive de la fonction $f$ est la fonction $F$ définie par $F(x) = -\dfrac{9}{2}\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right)$.

Donc $I = F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - F(0) = \left[-\dfrac{9}{2}\cos\left(\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3\pi}{2}\right)\right] - \left[-\dfrac{9}{2}\cos\left(\dfrac{0}{3}\right)\right] = \dfrac{9}{2} + \dfrac{9}{2} = 9$ unités d'aire.

**2.** On considère le domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$. On appelle $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en cm$^2$, de ce domaine.

la fonction $f$ est positive sur $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ donc $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = I = 9$ unités d'aire.

L'unité graphique étant de 2 cm sur chaque axe, l'unité d'aire est de 4 cm$^2$.
Donc $\mathscr{A} = 4 \times 9 = 36$ cm$^2$.

**FEUILLE ANNEXE**

**ENSEIGNEMENT RENFORCÉ (au choix)**

**Exercice 4 : annexe**