Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse Métropole septembre 2008

EXERCICE 1 — 5 points

1. On indique que, lorsque deux sons ont pour fréquences respectives f_1 et f_2 avec $f_1 < f_2$, la mesure de l'intervalle entre ces deux sons, exprimée en savarts, est donnée par la formule : $10^3 \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)$.

   La mesure de l'intervalle entre le MI_3 et le MI_4, en savarts, est égale à :

   a. $1\,000\log\left(2^{\frac{1}{12}}\right)$ **b.** $1\,000\log\left(2^{12}\right)$ **c.** $\boxed{1\,000\log 2}$

   Il y a 12 demi-tons entre le MI_3 et le MI_4 donc le rapport de fréquences entre ces deux notes est 2. La mesure de l'intervalle entre ces deux notes est donc $1\,000\log 2$.

2. On précise que l'intervalle de septième ascendante DO–SI a un rapport de fréquences égal à $2^{\frac{11}{12}}$. La mesure, en savarts, de l'intervalle séparant ces deux notes est égale à :

   a. $1\,000\left(\log 2^{11} - \log 2^{12}\right)$ **b.** $2\,000\log\left(\dfrac{11}{12}\right)$ **c.** $\boxed{\dfrac{11\,000}{12}\log 2}$

   $\dfrac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{11}{12}}$ donc la mesure de l'intervalle séparant ces deux notes est :

   $$10^3 \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 10^3 \log\left(2^{\frac{11}{12}}\right) = 10^3 \times \frac{11}{12}\log 2 = \frac{11\,000}{12}\log 2.$$

3. Le nombre entier p d'octaves qui peuvent être intercalées entre deux notes de fréquences respectives f_1 et f_2 avec $f_1 < f_2$ est tel que

   a. $\dfrac{f_2}{f_1}$ est congru à p modulo 2 **b.** $\boxed{2^p \leqslant \dfrac{f_2}{f_1} < 2^{p+1}}$ **c.** $\dfrac{f_2}{f_1}$ est congru à 2 modulo p.

   S'il y a k demi-tons entre la note de fréquence f_1 et la note de fréquence f_2, cela signifie que $\dfrac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{k}{12}}$.

   La division euclidienne de k par 12 donne $k = 12p + r$ avec $0 \leqslant r < 12$.

   Donc $2^{\frac{k}{12}} = 2^{\frac{12p+r}{12}} = 2^{p+\frac{r}{12}} = 2^p \times 2^{\frac{r}{12}}$.

   $0 \leqslant r < 12 \iff 0 \leqslant \dfrac{r}{12} < 1 \iff 1 \leqslant 2^{\frac{r}{12}} < 2 \iff 2^p \leqslant 2^p \times 2^{\frac{r}{12}} < 2^p \times 2 \iff 2^p \leqslant 2^{\frac{k}{12}} < 2^{p+1}$

   $\iff 2^p \leqslant \dfrac{f_2}{f_1} < 2^{p+1}$

4. Le rapport des fréquences correspondant à une quarte juste ascendante est égal à :

   a. $\boxed{2^{\frac{5}{12}}}$ **b.** $\dfrac{5}{2}$ **c.** $2^{\frac{12}{5}}$.

   Une quarte juste correspond à 5 demi-tons donc un rapport de fréquence de $2^{\frac{5}{12}}$.

5. Si l'on suppose que l'oreille humaine ne peut entendre un son de fréquence supérieure à 18000 Hz et que la fréquence du LA3 est à peu près de 440 Hz, alors- le premier LA inaudible plus aigu que le LA_3 est :

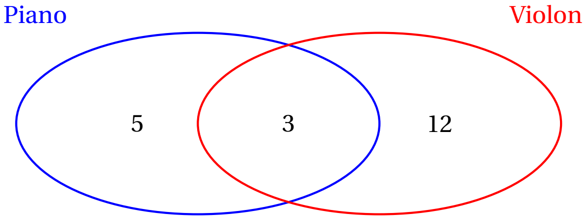
   a. LA_8 **b.** $\boxed{\text{LA}_9}$ **c.** LA_{10}

note	LA_3	LA_4	LA_5	LA_6	LA_7	LA_8	LA_9
fréquence	449	880	1 760	3 520	7 040	14 080	28 160

EXERCICE 2 — 8 points

Dans une classe de 20 élèves, spécialisée en musique, 8 élèves jouent du piano, 15 jouent du violon et 3 élèves jouent à la fois du piano et du violon.

1. On choisit au hasard un élève dans la classe. Chaque élève a la même chance d'être choisi.
   On répartit les 20 élèves selon l'instrument joué ; on commence par placer les 3 élèves qui jouent à la fois du piano et du violon ; il en reste $8-3=5$ qui ne jouent que du piano, et $15-3=12$ qui ne jouent que du violon :



   a. Il y a 3 élèves sur 20 qui jouent à la fois du piano et du violon ; donc la probabilité que l'élève choisi joue des deux instruments est de $\dfrac{3}{20}$.

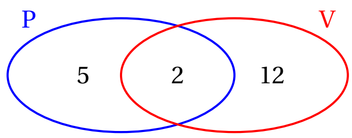
   b. Il y a 5 élèves qui jouent du piano sans jouer du violon donc la probabilité que l'élève choisi joue du piano sans jouer du violon est $\dfrac{5}{20}$.

   c. Il y a 12 élèves qui jouent du violon sans jouer du piano donc la probabilité que l'élève choisi joue du violon sans jouer du piano est $\dfrac{12}{20}$.

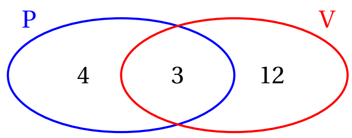
2. On prend successivement au hasard deux élèves différents dans la classe. On peut considérer que l'on est dans un cas de « tirages sans remise ».

   a. On écrit la répartition des 19 élèves après que le 1$^{\text{er}}$ élève a été choisi ; trois cas :

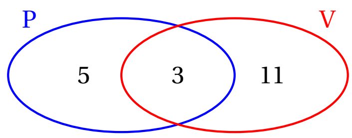
Le 1$^{\text{er}}$ élève joue du violon et du piano.



Le 1$^{\text{er}}$ élève joue du piano seulement.



Le 1$^{\text{er}}$ élève joue du violon seulement.

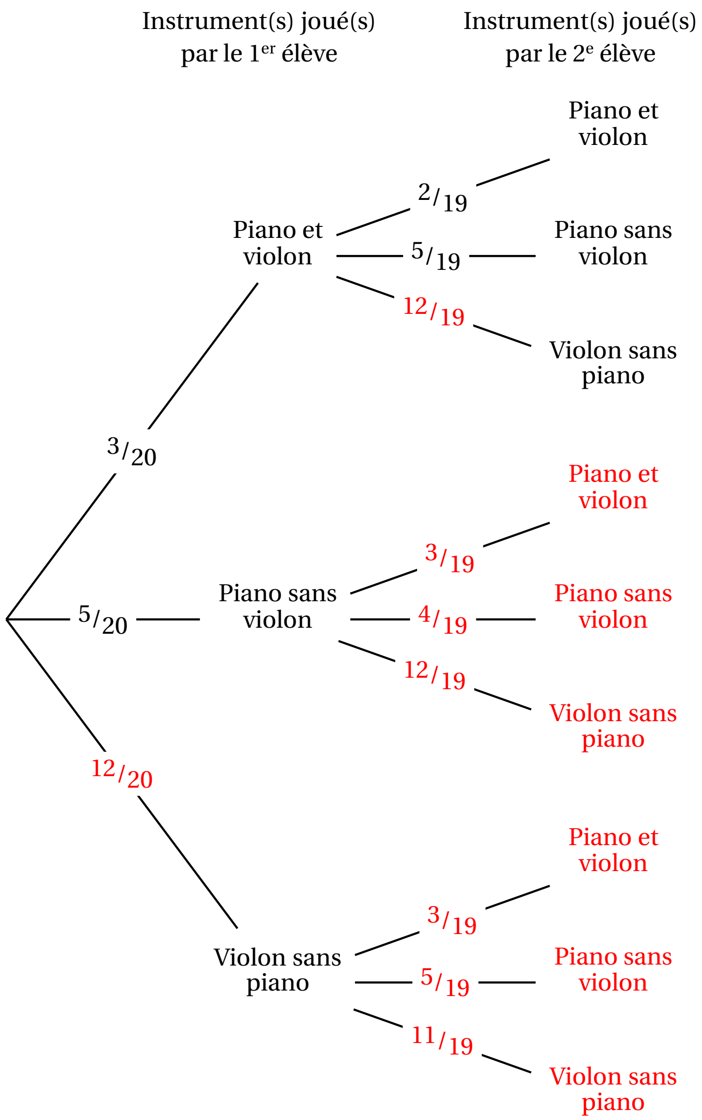


   On peut donc compléter l'arbre pondéré proposé (voir page suivante).

   b. La probabilité pour que les deux élèves choisis jouent tous deux à la fois du piano et du violon est, d'après l'arbre : $\dfrac{3}{20}\times\dfrac{2}{19}=\dfrac{3}{190}$.

   c. Il y a plusieurs cas disjoints qui forment l'événement « chacun des deux élèves choisis ne joue que d'un instrument » :

   - piano seulement et piano seulement avec une probabilité de $\dfrac{5}{20}\times\dfrac{4}{19}=\dfrac{1}{19}$;
   - piano seulement et violon seulement avec une probabilité de $\dfrac{5}{20}\times\dfrac{12}{19}=\dfrac{3}{19}$;



- violon seulement et piano seulement avec une probabilité de $\dfrac{12}{20} \times \dfrac{5}{19} = \dfrac{3}{19}$;
- violon seulement et violon seulement avec une probabilité de $\dfrac{12}{20} \times \dfrac{11}{19} = \dfrac{33}{95}$.

La probabilité que chacun des deux élèves choisis ne joue que d'un instrument est donc :

$$\frac{1}{19} + \frac{3}{19} + \frac{3}{19} + \frac{33}{95} = \frac{68}{95}.$$

3. On prend successivement au hasard trois élèves différents dans la classe.

Sur 20 élèves, il y en a 3 qui jouent de deux instruments; si les deux premiers élèves jouent des deux instruments, il en reste 1 qui joue des deux instruments sur $20-2=18$. La probabilité de choisir cet élève est donc de $\dfrac{1}{18}$.

La probabilité pour que tous les trois jouent à la fois du piano et du violon est donc : $\dfrac{3}{20} \times \dfrac{2}{19} \times \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{1\,140}$.

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 7 points

1. **a.** Si $I = I_0$, le niveau sonore est : $N(I_0) = 10\log\left(\dfrac{I_0}{I_0}\right) = 10\log 1 = 0$ dB.

   b. Lors du décollage de la fusée Ariane, on a observé que $I = I_0 \times 10^{17}$.

   $I = I_0 \times 10^{17}$ donc $\dfrac{I}{I_0} = 10^{17}$ et donc le niveau sonore est $N(I) = 10\log\left(10^{17}\right) = 10 \times 17 = 170$ dB.

2. Pour un marteau-piqueur, on a $N(I) = 110$.

   $N(I) = 110 \iff 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 110 \iff \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 11 \iff \dfrac{I}{I_0} = 1011 \iff I = I_0 \times 10^{11}$

3. Le niveau sonore d'un aspirateur est 70 dB.

   L'aspirateur correspond à une intensité de I donc trois aspirateurs correspondent à une intensité de $3I$.
   Le niveau sonore de trois aspirateurs est donc :

   $N(3I) = 10\log\left(\dfrac{3I}{I_0}\right) = 10\log\left(3 \times \dfrac{I}{I_0}\right) = 10\left(\log 3 + \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)\right) = 10\log 3 + 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$

   Il y a donc une augmentation du niveau sonore de $10\log 3 \approx 4,8$ dB, donc le niveau sonore des trois aspirateurs est d'environ 74,8 dB.

4. Un isolant acoustique est vendu pour effectuer une atténuation du niveau sonore de 1,5 dB par centimètre d'épaisseur. L'épaisseur en centimètres d'une cloison fabriquée avec ce matériau est de 10 cm.

   Un son d'intensité acoustique notée I_B émis dans une pièce est atténué en un son d'intensité acoustique I_C dans l'autre pièce.

   a. L'atténuation du niveau sonore est de 1,5 dB par centimètre d'épaisseur ; la cloison a une épaisseur de 10 cm donc l'atténuation est de $1,5 \times 10 = 15$ dB : $N(I_C) - N(I_B) = -15$.

   b. On applique la formule $\log a - \log b = \log\dfrac{a}{b}$:

   $$N(I_C) - N(I_B) = -15 \iff 10\log\left(\dfrac{I_C}{I_0}\right) - 10\log\left(\dfrac{I_B}{I_0}\right) = -15 \iff \log\left(\dfrac{I_C}{I_0}\right) - \log\left(\dfrac{I_B}{I_0}\right) = -1,5$$

   $$\iff \log\left(\dfrac{\frac{I_C}{I_0}}{\frac{I_B}{I_0}}\right) = -1,5 \iff \log\left(\dfrac{I_C}{I_B}\right) = -1,5$$

   c. $\log\left(\dfrac{I_C}{I_B}\right) = -1,5 \iff \dfrac{I_C}{I_B} = 10^{-1,5} \iff \dfrac{I_B}{I_C} = 10^{1,5}$ donc $\dfrac{I_B}{I_C} \approx 32$.

EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) 7 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}$.

1. $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times (x+1) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{(x+1)^2} = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$

2. **a.** Pour tout x de $]0\ ;\ 1]$, $x > 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $x+1 > 0$; donc sur cet intervalle $f' > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

   b. $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{0+1} = 1$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{1+1} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

   c. La fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$ donc pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ autrement dit : $1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

3. On désigne par P le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 0 et par Q celui d'abscisse 1.

   a. On désigne par T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point Q ; elle a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

   $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$ et $f'(1) = \dfrac{1 \times \mathrm{e}^1}{(1+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}}{4}$

   Donc T a pour équation : $y = \dfrac{\mathrm{e}}{4}(x-1) + \dfrac{\mathrm{e}}{2}$ c'est-à-dire : $y = \dfrac{\mathrm{e}}{4}x + \dfrac{\mathrm{e}}{4}$.

   b. La droite T est sécante à l'axe des ordonnées au point R.

   Le point R a pour abscisse 0 et pour ordonnée $\dfrac{\mathrm{e}}{4} \times 0 + \dfrac{\mathrm{e}}{4}$. le point R a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)$.

   c. Voir figure.

4. **a.** On désigne par I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

   - Le trapèze OPQI a pour aire : $\dfrac{(\mathrm{OP}+\mathrm{IQ}) \times \mathrm{OI}}{2} = \dfrac{\left(1+\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right) \times 1}{2} = \dfrac{2+\mathrm{e}}{4}$ unité d'aire.
   - Le trapèze ORQI a pour aire : $\dfrac{(\mathrm{OR}+\mathrm{IQ}) \times \mathrm{OI}}{2} = \dfrac{\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}+\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right) \times 1}{2} = \dfrac{3\mathrm{e}}{8}$ unité d'aire.

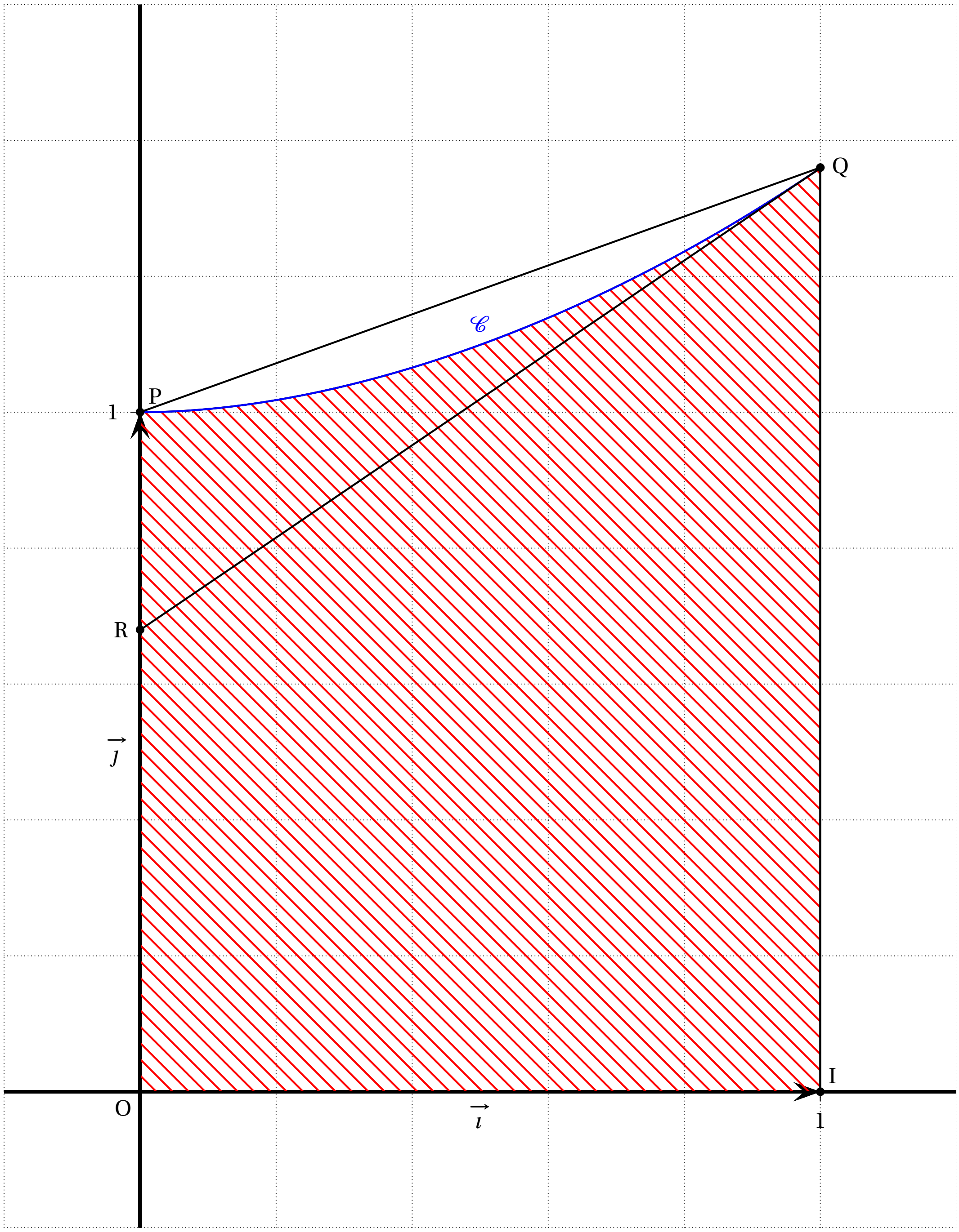
   b. On considère la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite (IQ) et la courbe $\mathscr{C}$. On hachure cette partie du plan sur le graphique.

   c. On désigne par $\mathscr{A}$ la mesure (en unités d'aire) de l'aire de la partie du plan hachurée.

   D'après le cours : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

   d. L'aire $\mathscr{A}$ est comprise entre les deux aires des trapèzes ORQI et OPQI donc, d'après les questions précédentes :

$$\frac{3\mathrm{e}}{8} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2+\mathrm{e}}{4}.$$



Q
$\mathscr{C}$
P
1
R
$\overrightarrow{\jmath}$
I
O
$\overrightarrow{\imath}$
1