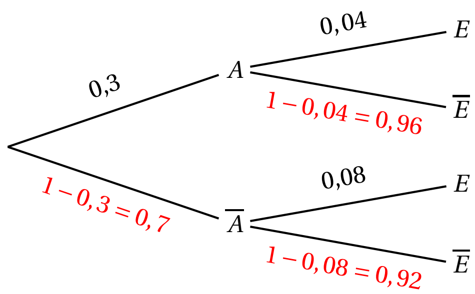
Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse
∽ Métropole septembre 2009 ∾

Exercice 1 — 7 points

1. D'après le texte, sur 250 partitions, 75 proviennent de l'éditeur Andante ; donc la probabilité qu'une partition choisie au hasard sur les 250 provienne de l'éditeur Andante est : $p(A) = \dfrac{75}{250} = 0,3$.
2. On sait que 75 partitions sur 250 proviennent d'Andante, donc $250 - 75 = 175$ ne proviennent pas d'Andante. Sur ces 175, il y en a 161 qui ne comportent pas d'erreur, donc $175 - 161 = 14$ qui comportent au moins une erreur. Sachant que la partition ne provient pas de chez Andante, la probabilité qu'elle ne comporte pas d'erreur est : $p_{\overline{A}}\left(\overline{E}\right) = \dfrac{14}{175} = 0,08$.
3. On construit un arbre de probabilité traduisant la situation :



4. L'évènement « la partition choisie provient de chez Andante et comporte au moins une erreur » est l'évènement $A \cap E$: $p(A \cap E) = p(A) \times p_A(E) = 0,3 \times 0,04 = 0,012$.
5. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de l'évènement E est égale à :
$p(E) = p(A \cap E) + p\left(\overline{A} \cap E\right) = 0,012 + 0,7 \times 0,08 = 0,012 + 0,056 = 0,068$.
6. Sachant que la partition choisie comporte une erreur, la probabilité que cette partition ne provienne pas de l'éditeur Andante est : $p_E\left(\overline{A}\right) = \dfrac{p\left(E \cap \overline{A}\right)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,068} \approx 0,82$.

Exercice 2 — 6 points

1. La fréquence, exprimée en hertz, de la note FA_5 est :

   a. 554 **b.** $\boxed{1\,397}$ **c.** 1 760

   Pour passer de LA_3 à FA_5 on monte de 20 demi-tons :

   $$\dots \quad \underbrace{LA_3 \quad \dots \quad \dots \quad LA_4}_{+12} \quad \quad LA\#_4 \quad SI_4 \quad DO_5 \quad DO\#_5 \quad RÉ_5 \quad RÉ\#_5 \quad MI_5 \quad FA_5 \quad \dots$$
   $$LA_4 \xrightarrow{+8} FA_5$$

   La fréquence de la note FA_5 est donc $440 \times q^{20} = 440 \times 2^{\frac{20}{12}} \approx 1\,397$.

2. Le nombre de notes LA d'octaves différentes que l'individu peut percevoir est :

   a. 7 **b.** 8 **c.** $\boxed{9}$

On part du LA_3 qui a une fréquence de 440 Hz. On passe au LA de l'ocatve du dessus en multipliant la fréquence par 2, et on passe au LA de l'octave du dessous en divisant par 2. On multiplie et on divise par 2 autant de fois qu'on peut en restant dans la plage audible entre 50 Hz et 15 000 Hz :

note	LA_0	LA_1	LA_2	LA_3	LA_4	LA_5	LA_6	LA_7	LA_8
fréquence	55	110	220	449	880	1 760	3 520	7 040	14 080

Le nombre de notes LA que peut percevoir l'individu est 9.

3. La plus basse note audible pour cet individu est :

a. SOL_0 **b.** $\boxed{SOL\#_0}$ **c.** LA_0

L'individu peut entendre le LA_0 qui a une fréquence de 55 Hz. La note juste en dessous est $SOL\#_0$ dont la fréquence est $\dfrac{55}{q} = \dfrac{55}{2^{\frac{1}{12}}} = 55 \times 2^{-\frac{1}{12}} \approx 52$ Hz. Donc cette note est encore audible.

Celle du dessous est SOL_0 de fréquence $\dfrac{55}{q^2} = 55 \times 2^{-\frac{2}{12}} \approx 49 < 50$ donc n'est pas audible.

La plus basse note audible est donc $SOL\#_0$.

4. Le nombre entier d'octaves commençant par DO que cet individu peut percevoir est :

a. $\boxed{7}$ **b.** 8 **c.** 9

La plus basse note que peut entendre l'individu est le $SOL\#_0$ donc la plus basse note DO qu'il peut entendre est le DO_1.

On passe du LA_0 (de fréquence 55 Hz) au DO_1 en ajoutant 3 demi-tons donc la fréquence du DO_1 est $55 \times q^3 = 55 \times 2^{\frac{3}{12}} \approx 65{,}5$ Hz.

Le SI_1 est à 11 demi-tons du DO_1 donc sa fréquence est de $65{,}5 \times q^{11} = 65{,}5 \times 2^{\frac{11}{12}} \approx 123{,}5$ Hz.

On établit le tableau des fréquences des notes DO et SI pour différentes octaves :

octave	1	2	3	4	5	6	7	8
DO	65,5	131	262	524	1 048	2 096	4 192	8 384
SI	123,5	247	494	988	1 976	3 953	7 908	15 808

Le nombre entier d'octaves que l'individu peut percevoir est donc 7.

5. En ajoutant neuf quintes à la note DO_3 on trouve la note :

a. $DO\#_8$ **b.** $RÉ_8$ **c.** $\boxed{RÉ\#_8}$

Une quinte est égale à 7 demi-tons donc ajouter 9 quintes revient à ajouter $9 \times 7 = 63$ demi-tons. De plus $63 = 12 \times 5 + 3$.

$$\dots \quad DO_3 \xrightarrow{+5\times 12} DO_8 \ (\dots\ \dots\ \dots) \quad DO_8 \xrightarrow{+3} RÉ\#_8$$

… DO_3 … … … DO_8 $DO\#_8$ $RÉ_8$ $RÉ\#_8$ MI_8 …

6. En ajoutant n quintes à la note $D0_3$ on trouve un MI audible par l'individu considéré.
Le nombre n vaut :

a. $\boxed{4}$ **b.** 5 **c.** 6

$$DO_3 \xrightarrow{+7} SOL_3 \xrightarrow{+7} RÉ_4 \xrightarrow{+7} LA_4 \xrightarrow{+7} MI_5$$

Donc $n = 4$.
On peut aussi utiliser les congruences. Pour passer d'un DO à un MI, il faut ajouter 4 demi-tons modulo 12 ; on doit donc chercher n tel que $7n \equiv 4$ modulo 12. On calcule les congruences modulo 12 :

n	1	2	3	4
$7n \equiv$	7	2	9	4

On retrouve $n = 4$.

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 7 points

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $\mathrm{I} = [-2\ ;\ 2]$, par $f(x) = \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

a. $f'(x) = \dfrac{1 \times \mathrm{e}^x - (x+2) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x-2)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{-x-1}{\mathrm{e}^x}$

b. On étudie, pour tout réel x de l'intervalle I, le signe de $f'(x)$:

x	-2		-1		2
$-x-1$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. $f(-2) = 0$; $f(-1) = \dfrac{-1+2}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}$; $f(2) = \dfrac{2+2}{\mathrm{e}^2} = 4\,\mathrm{e}^{-2} \approx 0,54$

On dresse le tableau de variations de la fonction f sur I :

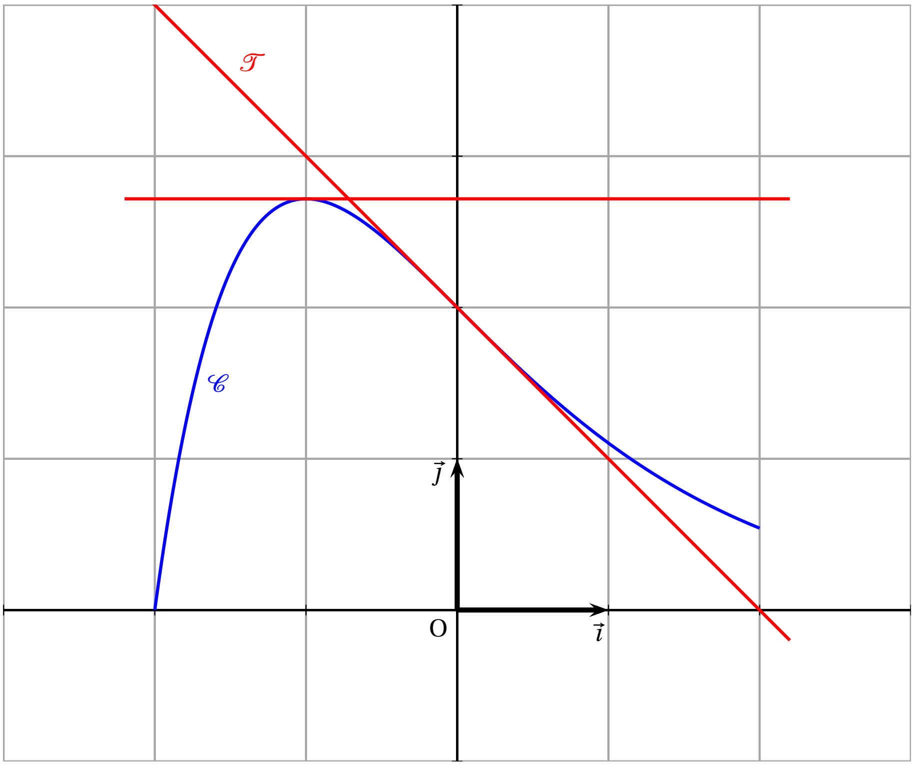
x	-2		-1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2}$

2. L'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
$f(0) = \dfrac{0+2}{\mathrm{e}^0} = \dfrac{2}{1} = 2$; $f'(0) = \dfrac{0-1}{\mathrm{e}^0} = -1$
La tangente $\mathscr{T}$ a pour équation $y = -x+2$.

3. On complète le tableau de valeurs suivant :

x	-2	$-1,8$	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	3	1,25	2,24	2,72	2,47	2	1,52	1,10	0,78	0,54

4. On construit la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{T}$ ainsi que la tangente parallèle à l'axe des abscisses.



EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) 7 points

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $\text{I} = \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right]$, par : $f(x) = 6\sin(2x) - 4\sin(3x)$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 10 cm.

1. $f(0) = 6\sin(0) - 4\sin(0) = 0$;

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6\sin\left(2\frac{\pi}{12}\right) - 4\sin\left(3\frac{\pi}{12}\right) = 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\times\frac{1}{2} - 4\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6\sin\left(2\frac{\pi}{6}\right) - 4\sin\left(3\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\times 1 = 3\sqrt{3} - 4$$

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$f'(x) = 6\times 2\times\cos(2x) - 4\times 3\times\cos(3x) = 12\cos(2x) - 12\cos(3x) = 12\left(\cos(2x) - \cos(3x)\right)$

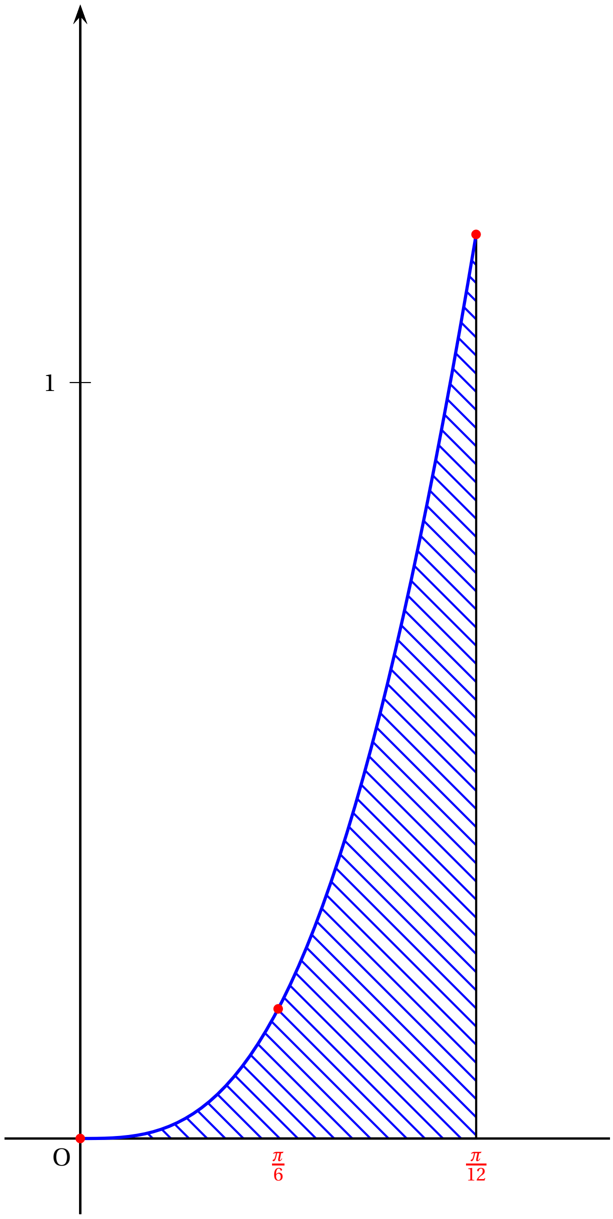
3. a. $f'(0) = 12\left(\cos(0) - \cos(0)\right) = 12(1-1) = 0$

b. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right]$, $\cos(2x) > \cos(3x)$.

On en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout x de I, donc la fonction f est strictement croissante sur I.

x	0	$\frac{\pi}{6}$
$f(x)$	0	$3\sqrt{3}-4$

4. On construit la courbe $\mathscr{C}$:



5. On considère la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la droite passant par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}\ ;\ 0\right)$ parallèle à l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$.

a. Voir figure.

b. On désigne par $\mathscr{A}$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan hachurée.

Par définition : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. On considère la fonction F définie, pour tout réel x de I, par : $F(x) = -3\cos(2x) + \dfrac{4}{3}\cos(3x)$.

$F'(x) = -3 \times (-2)\sin(2x) + \dfrac{4}{3} \times (-3)\sin(3x) = 6\sin(2x) - 4\sin(3x) = f(x)$

donc la fonction F est une primitive de f sur I.

d. On en déduit que :

$$\mathscr{A} = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \left[-3\cos\left(2\frac{\pi}{6}\right) + \frac{4}{3}\cos\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right] - \left[-3\cos(0) + \frac{4}{3}\cos(0)\right]$$

$$= \left[-3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[-3 + \frac{4}{3}\right] = \left[-3 \times \frac{1}{2} + 0\right] + 3 - \frac{4}{3} = -\frac{3}{2} + 3 - \frac{4}{3} = \frac{1}{6} \text{ unités d'aire.}$$