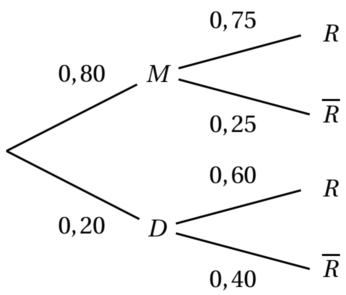
∽ Corrigé du baccalauréat technique de la musique et de la danse ∾ Métropole septembre 2011

EXERCICE 1 — 6 points

1. On complète l'arbre de probabilités suivant qui correspond à cette situation :



2. **a.** La probabilité que l'élève interrogé soit musicien et soit retenu pour le spectacle est $p(M \cap R)$:
$p(M \cap R) = p(M) \times p_M(R) = 0,80 \times 0,75 = 0,60$

   b. D'après la formule des probabilités totales :
$p(R) = p(M \cap R) + p(D \cap R) = p(M) \times p_M(R) + p(D) \times p_D(R) = 0,60 + 0,20 \times 0,60 = 0,72$

3. $p(M) = 0,80$ et $p(R) = 0,72$ donc $p(M) \times p(R) = 0,80 \times 0,72 = 0,576$
$p(M \cap R) = 0,60$
$p(M) \times p(R) \neq p(M \cap R)$ donc les événements M et R ne sont pas indépendants.

4. La probabilité que l'élève interrogé soit musicien sachant qu'il est retenu pour le spectacle est $p_R(M)$:
$p_R(M) = \dfrac{p(M \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0,60}{0,72} \approx 0,83$

EXERCICE 2 — 7 points

Partie 1. Étude graphique

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 3]$.

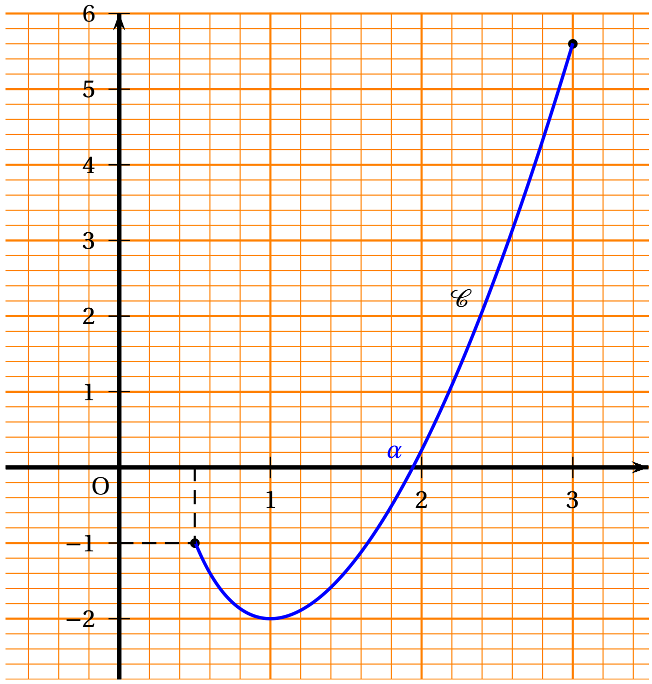
Par lecture graphique :

1. **a.** $f(0,5) \approx -1$ et $f(3) \approx 5,6$.

   b. Le nombre réel α de l'intervalle $[0,5 ; 3]$ tel que $f(\alpha) = 0$ vaut environ 1,9.

   c. La valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 3]$ est d'environ -2.

2. La fonction f est positive sur l'intervalle $]\alpha ; 3]$.



Partie 2. Étude de la fonction

La fonction f est définie, pour tout nombre réel x de $[0{,}5\,;\,3]$, par $f(x) = x^2 + 2x - 5 - 4\ln x$.

1. $f'(x) = 2x + 2 - \dfrac{4}{x}$
2. $(x-1)(x+2) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$
3. $f'(x) = 2x + 2 - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x} = \dfrac{2\left(x^2 + x - 2\right)}{x} = \dfrac{2(x-1)(x+2)}{x}$ pour tout x de $[0{,}5\,;\,3]$.
4. On étudie le signe de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,3]$:

x	0,5		1		3
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

5. $f(0{,}5) = -3{,}75 - 4\ln(0{,}5) \approx -0{,}977$; $f(1) = -2$ et $f(3) = 10 - 4\ln(3) \approx 5{,}6$
   On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[0{,}5\,;\,3]$:

x	0,5		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-3{,}75 - 4\ln(0{,}5)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$10 - 4\ln(3)$

EXERCICE 3 Enseignement obligatoire (au choix) 7 points

1. **a.** On part de la note LA. On ajoute quatre quintes donc $4 \times 7 = 28$ demi-tons et $28 = 2 \times 12 + 4$.

Si on ajoute un multiple de 12 demi-tons, on reste sur la même note ; en ajoutant 24 demi-tons on obtient donc un LA. En ajoutant 4 demi-tons de plus, on obtient la note DO#.

$$\ldots \quad \underbrace{\text{LA} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{LA}}_{+24} \quad \text{LA\#} \quad \text{SI} \quad \text{DO} \quad \text{DO\#} \quad \text{RÉ} \quad \ldots$$

$$\text{LA} \xrightarrow{+24} \text{LA} \xrightarrow{+4} \text{DO\#}$$

b. Une quarte fait 5 demi-tons donc quatre quartes font $4 \times 5 = 20$ demi-tons et $20 = 12 + 8$.

En retranchant 12 demi-tons, on obtient la même note LA ; en retranchant 8 demi-tons de plus, on obtient la note DO#.

$$\ldots \quad \text{DO} \quad \text{DO\#} \quad \text{RÉ} \quad \text{RÉ\#} \quad \text{MI} \quad \text{FA} \quad \text{FA\#} \quad \text{SOL} \quad \text{SOL\#} \quad \text{LA} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{LA} \quad \text{LA\#} \quad \ldots$$

$$\text{DO\#} \xleftarrow{-8} \text{LA} \xleftarrow{-12} \text{LA}$$

On obtient donc la même note qu'à la question **a.**

2. On désigne par n un entier naturel non nul.

a. $12 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 12)$ donc

$12n \equiv 0 \quad (\text{modulo } 12) \iff 7n + 5n \equiv 0 \quad (\text{modulo } 12) \iff 7n \equiv -5n \quad (\text{modulo } 12)$

b. On ajoute n quintes à la note LA ; donc on ajoute $7n$ demi-tons.

Si on retranche n quartes à la note LA, on retranche $5n$ demi-tons, ou on ajoute $-5n$ demi-tons. Or on a vu que $7n \equiv -5n \quad (\text{modulo } 12)$ donc les deux notes obtenues sont les mêmes, avec n octaves d'écart.

3. On part de la note LA_3.

a. On cherche la fréquence f_1 de la note obtenue en ajoutant quatre quintes à la note LA_3.

La suite des fréquences des notes est géométrique de raison q avec $q^{12} = 2$.

Si on monte de 4 quintes, on monte de $4 \times 7 = 28$ demi-tons ;

la fréquence de la note obtenue est donc $f_1 = 440 \times q^{28} = 440 \times 2^{\frac{28}{12}} \approx 2\,217$ Hz.

b. On cherche la fréquence f_2 de la note obtenue en retranchant quatre quartes de la note LA_3.

Retrancher quatre quartes revient à retrancher $4 \times 5 = 20$ demi-tons ; la fréquence de la note obtenue est donc $f_2 = 440 \times q^{-20} = 440 \times 2^{-\frac{20}{12}} \approx 139$ Hz.

c. La différence de hauteur entre les deux notes de fréquences f_1 et f_2 (avec $f_1 > f_2$) est

$$10^3 \log\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = 10^3 \log\left(\frac{440 \times 2^{\frac{28}{12}}}{440 \times 2^{-\frac{20}{12}}}\right) = 10^3 \log\left(2^{\frac{48}{12}}\right) = 10^3 \log\left(2^4\right) = 4\,000 \log(2) \approx 1\,204 \text{ savarts.}$$

On obtient $1\,203$ comme résultat si on calcule $10^3 \log\left(\dfrac{2\,217}{139}\right)$.

EXERCICE 4 Enseignement renforcé (au choix) 7 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ où l'unité graphique est 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère le point A d'affixe $z_\text{A} = 1 - \text{i}$ et le point B d'affixe $z_\text{B} = \sqrt{3} + \text{i}$.

1. $\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}} = \dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)(1+\text{i})}{(1-\text{i})(1+\text{i})} = \dfrac{\sqrt{3}+\text{i}+\text{i}\sqrt{3}+\text{i}^2}{1-\text{i}^2} = \dfrac{\sqrt{3}+\text{i}+\text{i}\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \text{i}\,\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$
2. **a.** Voir figure.

 b. $|z_\text{A}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; donc $z_\text{A} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \text{i}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

 On cherche donc un réel α tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ répond à la question.
 Le nombre complexe z_A a donc pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $-\dfrac{\pi}{4}$.
3. **a.** On sait que le module du nombre complexe z_B est 2. Donc $z_\text{B} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\,\dfrac{1}{2}\right)$

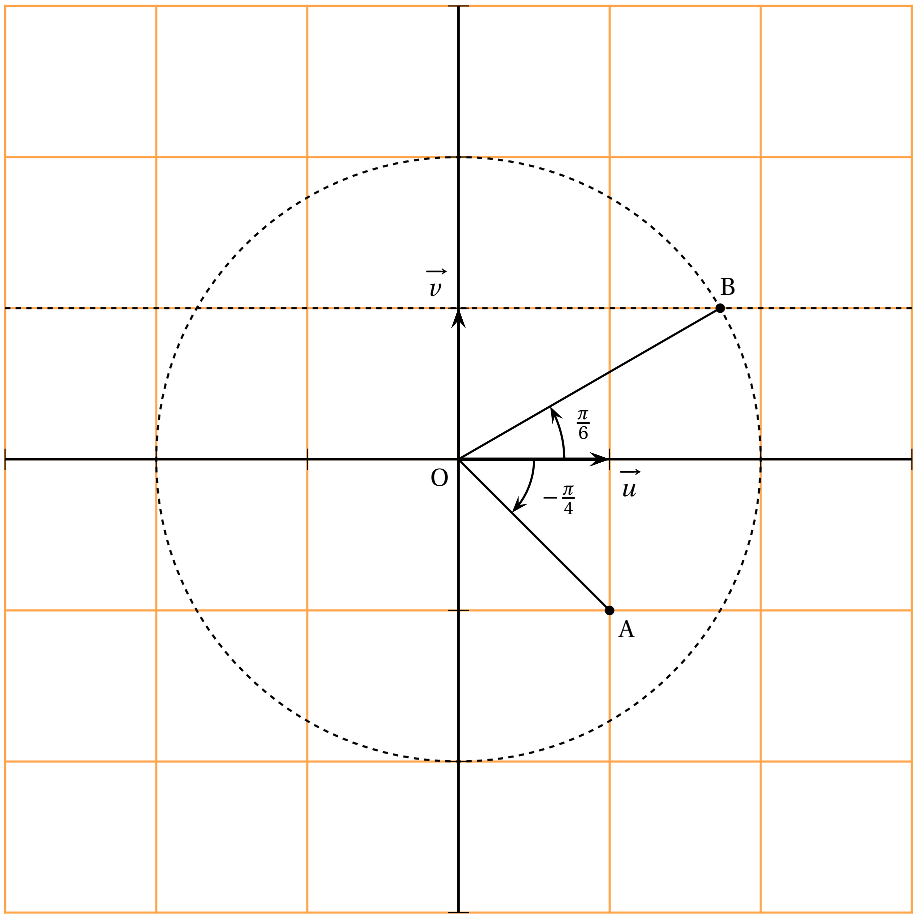
 On cherche donc un nombre β tel que $\cos(\beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\beta) = \dfrac{1}{2}$; $\beta = \dfrac{\pi}{6}$ répond à la question.
 Le nombre complexe z_B a donc pour module 2 et pour argument $\dfrac{\pi}{6}$.

 b. Le module de z_B est égal à 2 donc le point B se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2.
 La partie imaginaire de z_B est égale à 1 donc le point B se trouve sur la droite d'équation $y = 1$.
 Le point B se trouve donc à l'intersection du cercle et de la droite.
 Voit figure.
4. **a.** D'après le cours, $\left|\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}}\right| = \dfrac{|z_\text{B}|}{|z_\text{A}|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

 D'après le cours, $\arg\left(\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}}\right) = \arg(z_\text{B}) - \arg(z_\text{A})$ à 2π près,
 donc $\arg\left(\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}}\right) = \dfrac{\pi}{6} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}$ à 2π près.
 Le nombre $\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}}$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{5\pi}{12}$.

 b. On en déduit que $\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + \text{i}\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

 c. On a vu que $\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}} = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + \text{i}\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et que $\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \text{i}\,\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$;
 par identification des parties réelles on peut dire que :
 $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ et donc $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.



$\overrightarrow{v}$
B
$\frac{\pi}{6}$
O
$\overrightarrow{u}$
$-\frac{\pi}{4}$
A