Corrigé du baccalauréat TS Polynésie 20 juin 2018

EXERCICE 1

Partie A

1. On peut utiliser la formule des probabilités totales en utilisant la partition de Ω : $\left\{D\,;\,\overline{D}\right\}$:

$$P(R) = P(R\cap D) + P\left(R\cap\overline{D}\right) = P(D)\,P_D(R) + P\left(\overline{D}\right)\,P_{\overline{D}}(R).$$

Les informations données dans l'énoncé nous donnent :

$$P(D) = 0{,}06 \quad P_D(R) = 0{,}98 \quad P_{\overline{D}}(R) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$$

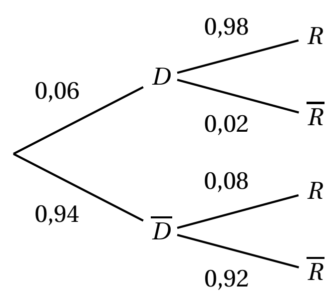
donc :

$$P(R) = 0{,}06\times 0{,}98 + 0{,}94\times 0{,}08 = 0{,}134.$$

2. On cherche à estimer la quantité de DVD défectueux parmi ceux qui sont retirés c'est-à-dire $P_R(D)$:

$$P_R(D) = \frac{P(D\cap R)}{P(R)} = \frac{P_D(R)\,P(D)}{P(R)} = \frac{0{,}98\times 0{,}06}{0{,}134} \approx 0{,}44.$$

Le responsable de la ville a donc tort : seulement 44 % des DVD retirés sont défectueux.



Partie B

Vérifions si la fréquence constatée de DVD défectueux dans l'échantillon — ici $f = \frac{14}{150} \approx 0{,}093$ — appartient ou non à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
n désigne la taille de l'échantillon ($n = 150$), p la proportion de DVD défectueux ($p = 0{,}06$).
Alors on a bien $n \geqslant 30$, $n\,p = 9 \geqslant 5$ et $n\,(1-p) = 141 \geqslant 5$.
On a alors :

$$1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\times 0{,}94}}{\sqrt{150}} \approx 0{,}038,$$

donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est ici :

$$[0{,}06 - 0{,}038\,;\,0{,}06 + 0{,}038] = [0{,}022\,;\,0{,}098].$$

La fréquence constatée appartient à cet intervalle. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse que 6 % des DVD soient défectueux.

Parie C

1. La variable aléatoire $Z = \frac{X-80}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Avec la calculatrice, on obtient :

$$P(Z < k) = 0{,}90 \iff k \approx 1{,}28.$$

On a donc $P(Z \geqslant 1{,}28) = 0{,}10$. Or

$$Z \geqslant 1{,}28 \iff \frac{X-80}{\sigma} \geqslant 1{,}28 \iff X \geqslant 1{,}282\sigma + 80.$$

On en déduit donc :

$$92 = 1{,}28\sigma + 80 \iff \sigma = \frac{92-80}{1{,}282} \approx 9{,}36.$$

2. Une heure et demie c'est 90 minutes donc on cherche :

$$P_{X\geqslant 90}(X \leq 95) = \frac{P\big((X \geqslant 90) \cap (X \leqslant 95)\big)}{P(X \geqslant 90)} = \frac{P(90 \leqslant X \leqslant 95)}{P(X \geqslant 90)}.$$

Avec une calculatrice, on obtient :

$$P(X \geqslant 90) \approx 0{,}143 \quad P(90 \leqslant X \leqslant 95) \approx 0{,}088,$$

donc la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes est :

$$P_{X\geqslant 90}(X \leqslant 95) = \frac{0{,}088}{0{,}143} \approx 0{,}62.$$

EXERCICE 2

Partie A : Modélisation de la forme de l'ampoule

Pour tout $x \in [0~;~4]$, on pose :

$$f(x) = a + b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$$

avec a, b et c des réels non nuls et $0 \leqslant c \leqslant \frac{\pi}{2}$.

1. **a.** Alors, pour tout $x \in [0~;~4]$:

$$f'(x) = b\frac{\pi}{4}\cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right).$$

b. En B et C les tangentes sont horizontales donc $f'(0) = f'(4) = 0$, c'est à dire :

$$b\frac{\pi}{4}\cos c = 0 \quad \text{et} \quad b\frac{\pi}{4}\cos(c+\pi) = 0.$$

Comme $b\frac{\pi}{4} \neq 0$, on a donc $\cos c = 0$ c'est à dire $c = \dfrac{\pi}{2}$ puisque $c \in \left[0~;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. On a $f(0) = 1$ et $f(4) = 3$ donc :

$$a + b\sin\frac{\pi}{2} = 1 \iff a + b = 1$$
$$a + b\sin\frac{3\pi}{2} = 3 \iff a - b = 3.$$

En ajoutant les deux équations, on obtient $2a = 4$ puis $a = 2$ et, en remplaçant a par sa valeur dans la première équation, on obtient $b = -1$. Conclusion : $f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Partie B : Approximation du volume de l'ampoule

1. Le cylindre de section ABFG a pour hauteur $h = 1$ et pour rayon $r = 1$. Donc son volume est :

$$V_{\text{Cyl}} = \pi \times 1^2 \times 1 = \pi.$$

2. La demi boule a pour rayon $r' = 3$ donc son volume sera :

$$V_{\text{Sph}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi.$$

3. **a.** La hauteur du cylindre sera $h = \frac{4}{5}$ puisque le segment $[0 ; 4]$ a été partagé en 5 segments de même longueur.

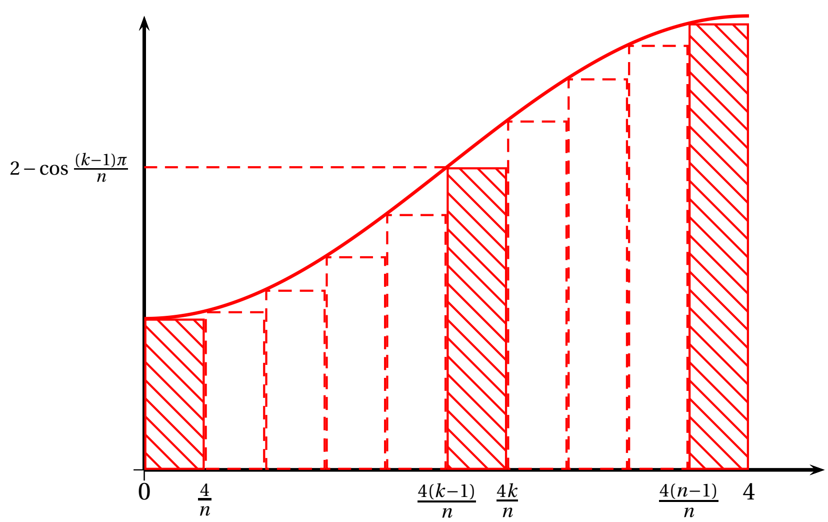
Le rayon du cylindre est donnée par $f(x_2)$ où x_2 est la borne inférieure du troisième segment : $x_2 = \frac{8}{5}$. Donc $r = 2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Finalement le volume du troisième cylindre sera :

$$V_3 = \frac{4\pi}{5}\left(2 - \cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 \approx 7{,}19$$

b. Dans le cas général, chaque cylindre aura comme hauteur $h = \frac{4}{n}$.

Le k^{e} cylindre pour $1 \leqslant k \leqslant n$ est délimité par les points d'abscisses $\frac{4}{n}(k-1)$ et $\frac{4}{n}k$.



Donc le rayon du k^{e} cylindre sera :

$$f\left(\frac{4(k-1)}{n}\right) = 2 - \cos\frac{(k-1)\pi}{n},$$

et le volume sera alors :

$$V_k = \frac{4\pi}{n}\left(2 - \cos\frac{(k-1)\pi}{n}\right)^2.$$

On a donc l'algorithme :

```
V ← 0
Pour k allant de 1 à n :
    | V ← V + (4π/n) (2 − cos((k−1)π/n))²
Fin Pour
```

$V \leftarrow 0$
Pour k allant de **1** à **n** :
$\quad | \; V \leftarrow \mathbf{V} + \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{n}}\left(\mathbf{2} - \cos\frac{\mathbf{(k-1)\pi}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{2}}$
Fin Pour

EXERCICE 3

1. La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$ est $x \mapsto -k\mathrm{e}^{-kx}$ donc une primitive de f est $F : x \mapsto -\mathrm{e}^{-kx}$.

2. L'ordonnée de B est $f(1) = k\mathrm{e}{-}k$ donc l'aire du triangle OCB est $A_1 = \frac{k}{2}\mathrm{e}^{-k}$.
L'aire de $\mathscr{D}$ est :

$$A_2 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\,\mathrm{e}^{-k} = [F(x)]_0^1 - \frac{k}{2}\,\mathrm{e}^{-k} = -\,\mathrm{e}^{-k} + 1 - \frac{k}{2}\,\mathrm{e}^{-k} = 1 - \left(1 + \frac{k}{2}\right)\mathrm{e}^{-k}.$$

3. On a $A_2 = 2A_1$ si et seulement si :

$$1 - \left(1 + \frac{k}{2}\right)\mathrm{e}^{-k} = 2 \times \frac{k}{2}\mathrm{e}^{-k} \iff 1 - \left(1 + \frac{k}{2}\right)\mathrm{e}^{-k} = k\,\mathrm{e}^{-k} \iff 1 = \left(1 + \frac{3}{2}k\right)\mathrm{e}^{-k}$$

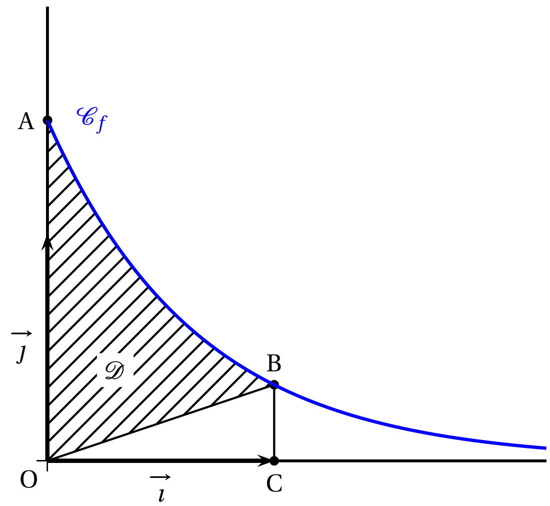
Considérons la fonction $g : x \mapsto 1 - \left(1 + \frac{3}{2}x\right)\mathrm{e}^{-x}$ et étudions ses variations sur $[0\,;\,+\infty[$.
Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + \left(\frac{3}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} = \frac{3x-1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Cette dérivée est du signe de $(3x-1)$ d'où :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	$\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$	$\nearrow$	1

En effet, $g(x) = 1 - \left(1 + \frac{3}{2}x\right)\mathrm{e}^{-x}$ et, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ (croissance comparée), on a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.
Sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{3}\right]$, la fonction est strictement décroissante et $g(0) = 0$ donc, pour tout $x \in \left]0\,;\,\frac{1}{3}\right]$, $g(x) < 0$.
Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$, la fonction g est définie, continue et strictement croissante de $g\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0{,}075$ à 1. Comme $0 \in \left]g\left(\frac{1}{3}\right)\,;\,1\right]$, on en déduit, d'après de le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne $\alpha \approx 0{,}76$.
Ce réel α est l'unique valeur strictement positif de k pour laquelle l'aire de $\mathscr{D}$ est le double de l'aire du triangle OBC. Voir la figure ci-dessous.



EXERCICE 4 OBLIGATOIRE

Partie A

1. Dans la cellule C3, on calcule $b_1 = \frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{2}b_0 + \frac{2}{3}c_0$: on peut saisir la formule `=2/3*B2+1/2*C2+1/3*D2`.
2. Sur le long terme, il semble que le lapin est dans la galerie A avec une probabilité d'environ 0,214, dans la galerie B avec une probabilité d'environ 0,574 et dans la galerie C avec une probabilité d'environ 0,214.

1. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{3}c_n = \frac{1}{3}(a_n - c_n) = \frac{1}{3}u_n.$$

   Donc la suite (u_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = a_0 - c_0 = 1$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

2. **a.** La somme $a_n + b_n + c_n$ est la somme des probabilités de trois évènements qui forment une partition de notre univers : notre lapin ne peut être qu'en A, en B ou en C et pas dans deux endroit en même temps. Donc cette somme vaut 1.

   Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} = b_{n+1} - \frac{4}{7} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n - \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n - \frac{1}{6}b_n - \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}b_n - \frac{4}{7} = \frac{2}{21} - \frac{1}{6}b_n \\ &= -\frac{1}{6}\left(b_n - \frac{4}{7}\right) = -\frac{1}{6}v_n \end{aligned}$$

b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{4}{7}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = -\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

De l'expression de v_n, on tire :

$$b_n = v_n + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

Par ailleurs, comme $a_n + b_n + c_n = 1$, on en déduit :

$$a_n + c_n = 1 - b_n = 1 - \frac{4}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

De plus, on établit précédemment l'expression de u_n, qui nous donne :

$$a_n - c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

En ajoutant membre à membre ces deux dernières égalités, on obtient :

$$2a_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \iff a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

En enfin, en remarquant par exemple que $c_n = a_n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, on a bien :

$$c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Lorsque n tend vers $+\infty$, les termes en $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et les termes en $\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ tendent vers zéro puisque $-1 < -\frac{1}{6} < \frac{1}{3} < 1$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{14} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{4}{7} \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{3}{14}$$

Au bout d'un grand nombre d'étapes, les probabilités que le lapin soit respectivement en A, en B ou en C seront proches de $\frac{3}{14}$, $\frac{4}{7}$ et $\frac{3}{14}$.

Exercice 4 spécialité

Partie A

1. On a $a_1 = 0,995$ et $b_1 = 0,005$ puisque qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité avec une probabilité de 0,005.

Pour l'étape suivante, on va utiliser la loi des probabilité totale en considérant la partition *stable/excité* de l'état de l'atome à l'étape 1 :

- il peut être stable à l'étape 1 et stable à l'étape 2 : la probabilité sera alors $0,995 \times 0,995 = 0,990\,025$;
- il peut être excité à l'étape 1 et stable à l'étape 2 : la probabilité sera alors $0,005 \times 0,6 = 0,003$.

Donc :

$$a_2 = 0,990\,025 + 0,003 = 0,993\,025 \quad b_2 = 1 - a_2 = 0,006\,975$$

2. Selon la même logique qu'à la question précédente, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}995a_n + 0{,}6b_n \quad b_{n+1} = 0{,}005a_n + 0{,}4b_n.$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} A \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0{,}995 & 0{,}005 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice, on trouve :

$$D = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix}$$

4. Démontrons la propriété par recurrence.
Initialisation : $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = \left(PD^nP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a bien $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = X_0 A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0{,}395^n & 1 - 0{,}395^n \\ 120\left(1 - 0{,}395^n\right) & 1 + 120 \times 0{,}395^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0{,}395^n & 1 - 0{,}395^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $a_n = \frac{1}{121}\left(120 + 0{,}395^n\right)$.

6. On a $-1 < 0{,}395 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}395^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{120}{121}$.
Sur le long terme, la probabilité que l'atome soit stable est de $\frac{120}{121}$.

Partie B

1. En nous inspirant de ce qui a été fait précédemment, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ a & 1 - a \end{pmatrix}.$$

2. On a :

$$XM = \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0{,}02 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ a & 1 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}98 \times 0{,}99 + 0{,}02a & 0{,}98 \times 0{,}01 + 0{,}02(1 - a) \end{pmatrix}$$

d'où

$$0{,}98 \times 0{,}99 + 0{,}02a = 0{,}98 \text{ donc } a = \frac{0{,}98 - 0{,}98 \times 0{,}99}{0{,}02} = \frac{0{,}01 \times 0{,}98}{0{,}02} = \frac{0{,}98}{2} = 0{,}49.$$

La probabilité qu'un atome passe de l'état excité à l'état stable est $a = 0{,}49$.