BAC C PARIS 1983

Exercice 1 :

1. Soit $d \in \mathbb{N}$ un diviseur commun de a, b et c.
Alors d divise $\text{pgcd}(a,b) = 3$ et, de même, d divise 4 donc $d = 1$.
D'où $\text{pgcd}(a,b,c) = 1$.

2. Soit $d = \text{pgcd}(ac, b)$.
3 divise a et 4 divise c donc 12 divise ac.
3 et 4 sont premiers entre eux et divisent b donc 12 divise b.
Soit p un diviseur premier de $\dfrac{ac}{12} = \dfrac{a}{3} \times \dfrac{c}{4}$ et $\dfrac{b}{12}$.
Alors p divise $\dfrac{a}{3}$ et $\dfrac{b}{3}$ ou p divise $\dfrac{c}{4}$ et $\dfrac{b}{4}$ ce qui est impossible dans les deux cas.
D'où $\text{pgcd}\left(\dfrac{ac}{12}, \dfrac{b}{12}\right) = 1$ et $d = 12$.
Or, a et c sont premiers entre eux donc $\text{ppcm}(a,b,c) = \text{ppcm}(ac,b) = \dfrac{acb}{d} = \dfrac{abc}{12}$.
D'où $abc = 12\,\text{ppcm}(a,b,c)$ et le résultat.

3. Cherchons d'abord les solutions dans $\mathbb{N}^3$.
On sait que 3 divise a, que 12 divise b et que 4 divise c.
Comme $12096 = 3 \times 12 \times 4 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$, il reste donc à répartir deux facteurs 2, et les facteurs 3 et 7 sur a, b et c.
a ne peut être pair donc $a \in \{3; 9; 21; 63\}$.
Comme $\text{pgcd}(b,c) = 4$, on ne peut rajouter ni un facteur 3, ni un seul facteur 2 à c.
Donc $c \in \{4; 16; 28; 112\}$.
De plus, si $a \in \{21; 63\}$, 7 ne divise pas c donc $c \in \{4; 16\}$.
D'où les douze solutions suivantes :
$(3; 1008; 4)$, $(3; 252; 16)$, $(3; 144; 28)$, $(3; 36; 112)$,
$(9; 336; 4)$, $(9; 84; 16)$, $(9; 48; 28)$, $(9; 12; 112)$,
$(21; 144; 4)$, $(21; 36; 16)$,
$(63; 48; 4)$, $(63; 12; 16)$.

Enfin, toute solution $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ est telle que $(|a|, |b|, |c|)$ est solution dans $\mathbb{N}^3$.
Or, a, b et c sont positifs ou deux d'entre eux sont négatifs.
On en déduit facilement les solutions dans $\mathbb{Z}^3$ qui sont au nombre de 48.

Exercice 2 :

1. Soit Δ l'axe d'un tel retournement.
Alors $I(0; 0; -1)$, le milieu de $[OA]$, et B sont sur Δ donc $\Delta = (IB)$.

Soit réciproquement f le retournement d'axe $\Delta = (IB)$.
Il est clair que $f(B) = B$.
$\overrightarrow{IB}(0; 1; 0)$ donc le plan orthogonal à Δ passant par O a pour équation $y = 0$ qui contient I.
En particulier, $f(O)$ est le symétrique de O par rapport à I donc $f(O) = A$.

Soit enfin $M(x,y,z) \in E$ d'image $M'(x',y',z')$ par f.
En notant (X, Y, Z) les coordonnées d'un point quelconque de E, le plan P orthogonal à Δ passant par M a pour équation $Y = y$.
Comme Δ est l'intersection des plans d'équations $X = 0$ et $Z = -1$, Δ et P se coupent en $(0; y; -1)$ qui est le milieu de $[MM']$.

En particulier, $\left\{\begin{array}{l}\frac{x+x'}{2}=0\\ \frac{y+y'}{2}=y\\ \frac{z+z'}{2}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x'=-x\\ y'=y\\ z'=-z-2\end{array}\right.$.

2. g est affine de matrice $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ qui est orthogonale de déterminant 1.
Donc g est un déplacement.
De plus, g admet une droite Δ' de points fixes d'équations $y=0$ et $z=1$ donc g est une rotation.
Son angle θ vérifie $1+2\cos\theta=\mathrm{tr}(A)=-1$ donc $\theta=\pi$.
Ainsi, g est le retournement d'axe Δ'.

3. h est un déplacement en tant que composée de deux déplacements.
Sa représentation analytique est $\left\{\begin{array}{l}x'=-x\\ y'=-y\\ z'=z-4\end{array}\right.$.
Ainsi, h n'a pas de points fixes donc c'est un vissage.
C'est la composée de l'application r de représentation analytique $\left\{\begin{array}{l}x'=-x\\ y'=-y\\ z'=z\end{array}\right.$ et de la translation t de vecteur $\overrightarrow{u}(0;0;-4)$ qui commutent.
Comme $r=t^{-1}\circ h$, r est un déplacement qui a pour points fixes les points de (Oz).
Comme pour g, on montre que r est un retournement.
Donc h est le vissage d'axe (Oz), d'angle π et de vecteur $\overrightarrow{u}$.

<u>Problème</u> :
1.a) Pour tous $t\in\mathbb{R}^*$ et $x\in\mathbb{R}-\{0,-t\}$, on a :
$-f_t(-x)=x\log|-x|+(-x-t)\log|-x-t|=x\log|x|-(x+t)\log|x+t|=f_{-t}(x)$.
De plus, $f_{-t}(0)=f_{-t}(-t)=-t\log|-t|=-t\log|t|=-f_t(0)=-f_t(t)$.
D'où l'égalité annoncée.

Soit s la symétrie de centre O et $M(x,y)$ un point du plan.
Alors $M\in\mathcal{C}_{-t}\Leftrightarrow y=f_{-t}(x)\Leftrightarrow -y=f_t(-x)\Leftrightarrow s(M)\in\mathcal{C}_t$.
Donc $s(\mathcal{C}_{-t})=\mathcal{C}_t$ et, comme s est une involution du plan, $s(\mathcal{C}_t)=\mathcal{C}_{-t}$.
En particulier, $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_{-t}$ sont symétriques par rapport à O.

b) Pour tous $t>0$ et $h\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right\}$, on a :

$$\begin{aligned}f_t\left(\frac{t}{2}-h\right)&=\left(\frac{t}{2}-h\right)\log\left|\frac{t}{2}-h\right|-\left(-h-\frac{t}{2}\right)\log\left|-\frac{t}{2}-h\right|\\&=\left(\frac{t}{2}+h\right)\log\left|\frac{t}{2}+h\right|-\left(\frac{t}{2}+h-t\right)\log\left|\frac{t}{2}+h-t\right|\\&=f_t\left(\frac{t}{2}+h\right).\end{aligned}$$

Comme $f_t(0)=f_t(t)$, cette égalité est vraie pour tout $h\in\mathbb{R}$ ce qui permet de conclure.

2.a) $\lim\limits_{h\to 0}ah=0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log(1+h)}{h}=1$ donc, par limite composée, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log(1+ah)}{ah}=1$.
D'où le résultat.

b) Il est clair que f_t est continue sur $\left[\frac{t}{2};t\right[\cup]t;+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to t} x-t=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\log|x|=0$ d'après un théorème des croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to t}(x-t)\log|x-t|=0$ par limite composée.
D'où $\lim\limits_{x\to t} f_t(x)=t\log|t|=f_t(t)$ et f_t est aussi continue en t.

c) Il est clair que f_t est dérivable sur $\left[\frac{t}{2};t\right[\cup]t;+\infty[$, où :

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= \log(x)+x\times\frac{1}{x}-\log|x-t|-(x-t)\times\frac{1}{x-t} \\ &= \log(x)-\log|x-t|. \end{aligned}$$

Or, si $x\in\left[\frac{t}{2};t\right[$, $|x-t|=t-x$ et $x\geq t-x$ avec égalité pour $x=\frac{t}{2}$.

Si $x\in]t;+\infty[$, $|x-t|=x-t$ et $x>x-t$ car $t>0$.

Ainsi, sur $I_t-\left\{\frac{t}{2},t\right\}$, $\log(x)>\log|x-t|$ soit $f_t'(x)>0$ donc f_t est strictement croissante sur I_t d'après 2.b).

Pour tout $h\in\left]-\frac{t}{2},+\infty\right[-\{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{f_t(t+h)-f_t(t)}{h} &= \frac{(t+h)\log(t+h)-h\log|h|-t\log t}{h} \\ &= \frac{t\left[\log(t+h)-\log t\right]+h\left[\log(t+h)-\log|h|\right]}{h} \\ &= t\frac{\log(1+\frac{h}{t})}{h}+\log\frac{t+h}{|h|}. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{t+h}{|h|}=+\infty$ et $\lim\limits_{h\to+\infty}\log h=+\infty$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\log\frac{t+h}{|h|}=+\infty$ par limite composée.

En utilisant 2.a) avec $a=\frac{1}{t}$, on a $\lim\limits_{h\to 0} t\frac{\log(1+\frac{h}{t})}{h}=t\times\frac{1}{t}=1$.

Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f_t(t+h)-f_t(t)}{h}=+\infty$ donc f_t n'est pas dérivable en t.

d) Pour tout $x>t$,

$$\begin{aligned} \frac{f_t(x)}{x} &= \frac{x\left[\log(x)-\log(x-t)\right]+t\log(x-t)}{x} \\ &= \log\frac{x}{x-t}+t\frac{\log(x-t)}{x} \\ &= \log\frac{x}{x-t}+t\frac{x-t}{x}\frac{\log(x-t)}{x-t} \\ &= \log\frac{1}{1-\frac{t}{x}}+t\left(1-\frac{t}{x}\right)\frac{\log(x-t)}{x-t}. \end{aligned}$$

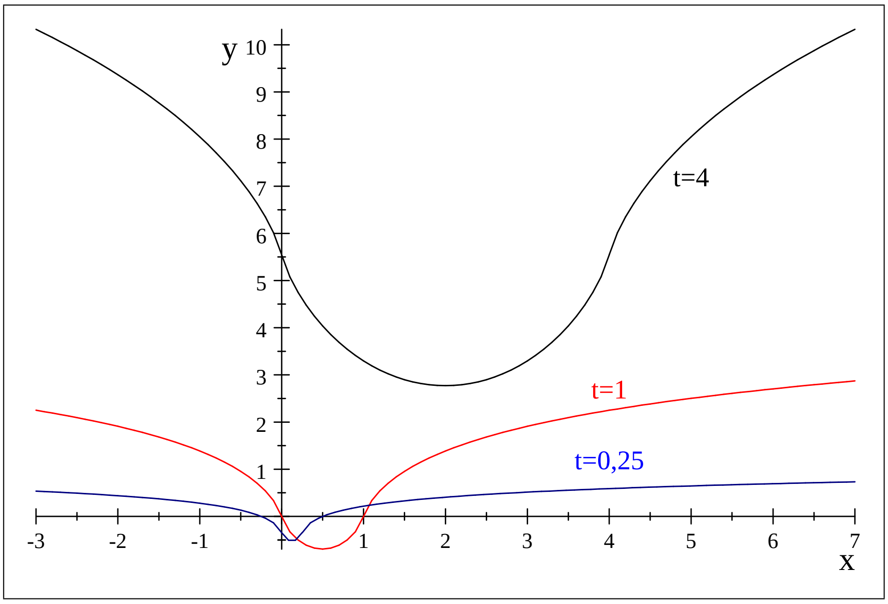
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-\frac{t}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \log x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \log \dfrac{1}{1-\frac{t}{x}} = 0$ par limite composée.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - t = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ d'après un théorème des croissances comparées

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x-t)}{x-t} = 0$ par limite composée.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} t\left(1-\dfrac{t}{x}\right)\dfrac{\log(x-t)}{x-t} = t\times 1\times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_t(x)}{x} = 0$.

e)



f) Pour tout $x > t$,

$$\begin{aligned}
f_t(x) &= x\log x - (x-t)\log(x-t)\\
&= (x-t)\left[\log x - \log(x-t)\right] + t\log x\\
&= (x-t)\log\frac{x}{x-t} + t\log x\\
&= (t-x)\log\left(1-\frac{t}{x}\right) + t\log x\\
&= -\frac{t}{x}(t-x)\frac{\log\left(1-\frac{t}{x}\right)}{-\frac{t}{x}} + t\log x\\
&= \left(t-\frac{t^2}{x}\right)\frac{\log\left(1-\frac{t}{x}\right)}{-\frac{t}{x}} + t\log x.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{t}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\left(1-\frac{t}{x}\right)}{-\frac{t}{x}} = 1$ par limite composée.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (t-\dfrac{t^2}{x})\dfrac{\log\left(1-\frac{t}{x}\right)}{-\frac{t}{x}} = t$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} t\log x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_t(x) = +\infty$.

f_t est continue et strictement croissante sur I_t donc f_t réalise une bijection de I_t dans

$J_t = \left[f_t\left(\dfrac{t}{2}\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f_t(x) \right[= \left[t\log\dfrac{t}{2}; +\infty \right[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

3.a) D'après 1.b) et 2.c), f_t est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{t}{2}\right]$ donc f_t présente en $\dfrac{t}{2}$ un maximum global.

Ainsi, pour tout x réel, $f_t(x) \geq t\log\dfrac{t}{2} > 0$ si $t > 2$ et f_t ne s'annule pas.

b) De même, f_2 présente en 1 un maximum global qui vaut $2\log 1 = 0$ donc f_2 s'annule en 1 seulement.

c) Si $0 < t < 1$, $t\log\dfrac{t}{2} < 0$ donc f_t s'annule une seule fois sur I_t en $\beta(t)$ d'après 2.f).
D'après 1.b), f_t s'annule aussi une seule fois sur $\left]-\infty; \dfrac{t}{2}\right]$ en $\alpha(t)$.

De plus, $f_t(\beta(t)) = f_t\left(\dfrac{t}{2} + \beta(t) - \dfrac{t}{2}\right) = f_t\left(\dfrac{t}{2} - \beta(t) + \dfrac{t}{2}\right) = f_t(t - \beta(t)) = 0$ d'après 1.b) avec $t - \beta(t) < \dfrac{t}{2}$ donc $t - \beta(t) = \alpha(t)$ par un argument d'unicité.

4.a) Comme $0 < t < 1$, $f_t(t) = t\log t < 0$ et $f_t(1) = \underbrace{(t-1)}_{<0}\underbrace{\log(1-t)}_{<0} > 0$.
Donc, par stricte croissance de f_t sur I_t, $t < \beta(t) < 1$.

b) Par définition de $\beta(t)$, $f_t(\beta(t)) = \beta(t)\log\beta(t) - [\beta(t) - t]\log[\beta(t) - t] = 0$ donc

$$\log\beta(t) = \frac{\beta(t) - t}{\beta(t)}\log[\beta(t) - t].$$

Comme $\dfrac{\beta(t)}{t} > 1 > t$, on a :

$$\begin{aligned}
f_1\left(\frac{\beta(t)}{t}\right) &= \frac{\beta(t)}{t}\log\frac{\beta(t)}{t} - \left(\frac{\beta(t)}{t} - 1\right)\log\frac{\beta(t)-t}{t} \\
&= \frac{\beta(t)}{t}\left(\log\frac{\beta(t)}{t} - \log\frac{\beta(t)-t}{t}\right) + \log\frac{\beta(t)-t}{t} \\
&= \frac{\beta(t)}{t}\left(\log\beta(t) - \log t + \log t - \log[\beta(t)-t]\right) - \log t + \log[\beta(t)-t] \\
&= \frac{\beta(t)}{t}\left(\frac{\beta(t)-t}{\beta(t)}\log[\beta(t)-t] - \log[\beta(t)-t]\right) - \log t + \log[\beta(t)-t] \\
&= \frac{\beta(t)}{t} \times \frac{-t}{\beta(t)}\log[\beta(t)-t] - \log t + \log[\beta(t)-t] \\
&= -\log t.
\end{aligned}$$

De plus, $\dfrac{\beta(t)}{t} > t > \dfrac{t}{2}$ donc $f_1\left(\dfrac{\beta(t)}{t}\right) = g_1\left(\dfrac{\beta(t)}{t}\right)$ et, par définition de h_1, il vient $\dfrac{\beta(t)}{t} = h_1(-\log t)$ ce qui implique la deuxième égalité.

c)i) Pour tout $x > 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x\log x - (x-1)\log(x-1) - 1 - \log x \\
&= (x-1)\left[\log x - \log(x-1)\right] - 1 \\
&= (1-x)\log\frac{x-1}{x} - 1 \\
&= (1-x)\log\left(1-\frac{1}{x}\right) - 1 \\
&= -\frac{1}{x}(1-x)\frac{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} - 1 \\
&= (1-\frac{1}{x})\frac{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} - 1.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} = 1$ par limite composée.
D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} = 1$ et le résultat.

ii) g_1 est strictement croissante sur I_1 donc h_1 est strictement croissante sur J_1.
Donc pour tous $A > \frac{1}{2}$ et $x > g_1(A)$, on a $h_1(x) > A$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x) = +\infty$ donc, par limite composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x) = 0$ d'après i).

De plus, pour tout $x \in J_1$, $h_1(x) \in I_1$ et $\psi(x) = \varphi\left[h_1(x)\right] = g_1\left[h_1(x)\right] - 1 - \log h_1(x)$.
D'où $\log h_1(x) = x - 1 - \psi(x)$ et le résultat en passant à l'exponentielle.

d) Pour tout $t \in]0;1[$, $-\log t > 0$ donc $-\log t \in J_1$ et

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= t \times h_1(-\log t) \\
&= t \times \exp\left[-\log t - 1 - \psi(-\log t)\right] \\
&= t \times \exp(-\log t)\exp\left[-1 - \psi(-\log t)\right] \\
&= \exp\left[-1 - \psi(-\log t)\right].
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{t\to 0^+} -\log t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} -1 - \psi(t) = -1$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} -1 - \psi(-\log t) = -1$ par limite composée.

Ainsi, par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to 0^+}\beta(t) = \frac{1}{e}$.