Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat Terminale ES Liban
5 juin 2017

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2}{x}$.

   La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ se calcule avec la formule : $\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x$.

   Une primitive de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ est la fonction G définie par :

   $$G(x) = 2\ \ln(x)$$

   $\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\ [\,G(x)\,]_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\,(G(\mathrm{e}) - G(1)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}(2\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}-1} - 0) = \dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$. **Réponse c.**

2. D'après le cours, nous savons que : $P\left(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma\right) \approx 0,95$.

   La courbe est symétrique autour de la droite $x = \mu = 1$.

   Donc en utilisant le graphique, on obtient : $\mu - 2\sigma = 0,6$ donc $2\sigma = 0,4$ soit $\sigma = 0,2$. **Réponse d**.

3. D'après l'énoncé $p = 0,15$.

   On vérifie ensuite les trois conditions : $n = 50 \geqslant 30$; $np = 7,5 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 42,5 \geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients qui devraient acheter un bouquet est :

   $I_{50} = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] =$

   $\left[0,15 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,15\times 0,85}}{\sqrt{50}}\ ;\ 0,15 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,15\times 0,85}}{\sqrt{50}}\right] \approx [0,051\ ;\ 0,249]$. **Réponse a**.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes

Partie A : L'accord de Kyoto (1997)

1. Le calcul du taux de baisse se calcule avec : $\dfrac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 = \dfrac{486 - 559}{559} \times 100 \approx -13,1\,\%$.

   En 2011 la France respectait donc déjà cet engagement.

2. Le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010 sera :

   $486 \div \left(1 - \dfrac{5,6}{100}\right) \approx 514,8$ (mégatonnes).

Partie B : Étude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

1. $u_0 = 41$. Puis on enlève 2 % à u_0 et on ajoute 200 tonnes soit 0,2 milliers de tonnes,

   soit $u_1 = 41 - 41 \times \dfrac{2}{100} + 0,2 = 0,98 \times 41 + 0,2 = 40,38$.

2. Pour calculer la quantité émise l'année $n+1$, on enlève 2 % (il restera donc 98 %) à la quantité émise lors de l'année n puis on ajoute 0,2 (200 tonnes en milliers de tonnes).
Donc pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 10$.

a. Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 0,98 \times u_n + 0,2 - 10 = 0,98 \times u_n - 9,8 = 0,98 \times (u_n - 10) = 0,98 \times v_n$.
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $0,98$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 10 = 31$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 31 \times 0,98^n$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 10$ donc $u_n = v_n + 10 = 31 \times (0,98)^n + 10$.

$$u_n = 31 \times (0,98)^n + 10,\ n \in \mathbb{N}.$$

4. a. Nous savons que $q \in]-1\ ;\ 1[$ donc la suite géométrique de raison q tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc la suite (v_n) a pour limite 0 en l'infini. La limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini est donc égale à 10.

b. Cela veut donc dire qu'au bout d'un très grand nombre d'année, les émissions de cette zone industrielle tendrons vers 10 milliers de tonnes, sans pouvoir descendre encore en dessous de cette limite.

5. a.

Recopier et compléter les lignes 7 et 9 de l'algorithme

```
1   Variables
2     U est du type nombre
3     n est du type nombre entier
4   Début Algorithme
5     U prend la valeur 41
6     n prend la valeur 0
7     Tant que U ⩾ 20,5 faire
8       Début Tant que
9       U prend la valeur 0,98 × U + 0,2
10      n prend la valeur n + 1
11      Fin Tant que
12    Afficher n
13  Fin Algorithme
```

b. L'algorithme affiche 54. Donc au bout de 54 années après 2005, et donc en 2059, les émissions de la zone industrielle auront diminué de moitié.

Exercice 3 **5 points**

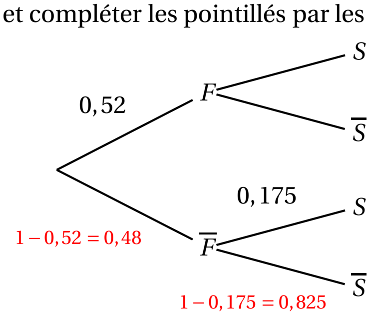
Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. D'après l'énoncé, $p(S) = 0,18$ et $p_{\overline{F}}(S) = 0,175$.

2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.



3. Formule de Bayes : $p\left(\overline{F}\cap S\right) = p_{\overline{F}}(S)\times p\left(\overline{F}\right) = 0,175\times 0,48 = 0,084$.

La probabilité que la fiche prélevée soit celle d'un homme demandeur d'emploi sans expérience est égale à $0,084$.

4. On cherche : $p_S\left(\overline{F}\right)$. La formule de Bayes donne : $p_S\left(\overline{F}\right) = \dfrac{p\left(\overline{F}\cap S\right)}{p(S)} = \dfrac{0,084}{0,18} \approx 0,467$.

La probabilité que la fiche d'un demandeur d'emploi sans expérience soit celle d'un homme est environ $0,467$.

5. Formule des probabilités totales : $p(S) = p(S\cap F) + p\left(S\cap\overline{F}\right) = p_F(S)\times p(F) + p_{\overline{F}}(S)\times p\left(\overline{F}\right)$.

Donc $p_F(S) = \dfrac{p(S) - p_{\overline{F}}(S)\times p\left(\overline{F}\right)}{p(F)} = \dfrac{0,18 - 0,084}{0,52} \approx 0,185$.

La probabilité que la fiche d'une femme soit celle d'un demandeur d'emploi sans expérience est au millième près $0,185$.

Partie B

On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de fiches de demandeurs d'emploi sans expérience.

L'expérience est répétée 5 fois. Les tirages sont indépendants, identiques et aléatoires. À chaque fiche il y a deux issues : il est sans expérience, avec une probabilité de 0,18, ou il est avec expérience avec une probabilité de 0,82. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,18$. On veut déterminer $P(X\geqslant 1)$:

$P(X\geqslant 1) = 1 - p(X<1) = 1 - p(X=0) = 1 - \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\times 0,18^0\times 0,82^5 \approx 0,629$.

La probabilité que, parmi les cinq fiches tirées au hasard, il y ait au moins une fiche de demandeur d'emploi sans expérience est 0,629 au millième près.

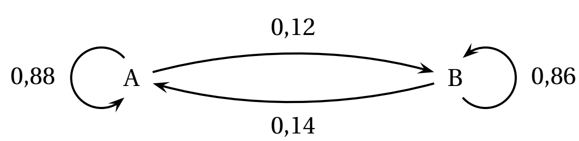
Exercice 3 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

1. Le graphe probabiliste :



2. $a_0 = 0,30$ et $b_0 = 1 - a_0 = 0,70$.

3. Calculons $P_3 = \begin{pmatrix}a_3 & b_3\end{pmatrix}$.

$P_3 = \begin{pmatrix}a_0 & b_0\end{pmatrix}\times M^3 = \begin{pmatrix}0,30 & 0,70\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,88 & 0,12\\0,14 & 0,86\end{pmatrix}^3 \approx \begin{pmatrix}0,442 & 0,558\end{pmatrix}$ Donc en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.

4. a. Les termes de la matrice de transition M ne sont pas nus, donc l'état P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ qui se trouve en résolvant le système d'équations suivant :

$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,88 & 0,12\\0,14 & 0,86\end{pmatrix}$, d'où : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0,88x + 0,14y\\ y & = & 0,12x + 0,86y\end{array}\right.$

Ces deux équations se simplifient pour obtenir : $0,12x+0,86y=0$. De plus $x+y=1$. Donc le couple $(x\ ;\ y)$ est solution du système : $\left\{\begin{array}{lcl}0,12x-0,14y &=& 0\\ x+y &=& 1\end{array}\right.$

b. Par substitution :

$$\left\{\begin{array}{lcl}0,12x-0,14y &=& 0\\ x+y &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}0,12(1-y)-0,14y &=& 0\\ x &=& 1-y\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}0,12-0,26y &=& 0\\ x &=& 1-y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}y &=& \dfrac{0,12}{0,26}=\dfrac{12}{26}=\dfrac{6}{13}\\ x &=& 1-\dfrac{6}{13}=\dfrac{7}{13}\end{array}\right.$$

L'état stable du système est $P=\begin{pmatrix}\dfrac{7}{13} & \dfrac{6}{13}\end{pmatrix}$.

c. On a $\dfrac{6}{13}\approx 0,462$ et $\dfrac{7}{13}\approx 0,538$.

Au bout d'un grand nombre d'années, l'opérateur Alpha aura environ 53,8 % des abonnés, et Bravo 46,2 %.

Partie B

1. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra on obtient le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	Sommets
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	C
25 (C)	30 (C)	×	20 (C)	∞	∞	∞	∞	∞	D
25 (C)	30 (C)	×	×	40 (D)	∞	∞	∞	35 (D)	A
×	30 (C)	×	×	40 (D)	∞	∞	35 (A)	35 (D)	B
×	×	×	×	40 (D)	∞	∞	35 (A)	35 (D)	H
×	×	×	×	40 (D)	45 (H)	55 (H)	×	35 (D)	I
×	×	×	×	40 (D)	45 (H)	55 (H)	×	×	E
×	×	×	×	×	45 (H)	55 (H)	×	×	F
×	×	×	×	×	×	50 (F)	×	×	G

Le tracé le moins cher pour aller de C à G sera : C – A – H – F – G.

2. Son coût est de 50 milliers d'euros.

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont liées

Partie A

1. La fonction f est continue, dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$. De plus, f est de la forme $\dfrac{1}{u}$, de dérivée $-\dfrac{u'}{u^2}$.

   Donc $f'(x)=-\dfrac{-100\text{e}^{-x}}{(0,5+100\text{e}^{-x})^2}=\dfrac{100\text{e}^{-x}}{(0,5+100\text{e}^{-x})^2}$

2. **a.** Sur l'intervalle $[0\,;\,10]$,

   $100\text{e}^{-x}-0,5\geqslant 0 \iff 100\text{e}^{-x}\geqslant 0,5 \iff \text{e}^{-x}\geqslant\dfrac{0,5}{100} \iff \text{e}^{-x}\geqslant 0,005 \iff -x\geqslant\ln(0,005)$
   $\iff x\leqslant -\ln(0,005)$.

b. Le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0\,;\,10]$:

x	0		$-\ln(0,005)$		10
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

3. La dérivée seconde f'' s'annule et change de signe pour $x = -\ln(0,005)$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = -\ln(0,005) = \ln\left(\dfrac{1}{0,005}\right) = \ln 200 \approx 5,3$.

4. De plus le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ nous permet d'affirmer que la fonction f est concave sur l'intervalle $[\ln 200\,;\,10]$ car $f''(x) \leqslant 0$ sur cet intervalle.

Partie B

Dans toute cette partie les températures seront exprimées en degrés Celsius, notés °C

1. a. $f(10) = \dfrac{1}{0,5+100\mathrm{e}^{-10}} \approx 1,98$, en arrondissant le résultat au centième.

b. $2150 = 1900 + 10 \times 25$ donc cela correspond à $x = 10$. Cela signifie donc qu'en l'année 2150 l'augmentation de température sera de 1,98 degré. L'objectif de l'accord de Paris sera respecté.

2. a. L'abscisse du point d'inflexion est : $x = -\ln(0,005) \approx 5,298$, donc ce sera vers l'année $1900 + 5,3 \times 25 \approx 2032$.

b. $f(-\ln(0,005)) = \dfrac{1}{0,5+100\mathrm{e}^{-(-\ln(0,005))}} = \dfrac{1}{0,5+100\times(0,005)} = 1$, soit 1 degré Celsius supplémentaire par rapport à 1900.

3. a. La fonction f' est strictement positive pour tout x. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,10]$. La température terrestre augmentera donc continuellement. Par conséquent l'affirmation est fausse.

b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[\ln 200\,;\,10]$. Cela signifie donc que la fonction dérivée de f est décroissante sur cet intervalle. Or $x = \ln 200 \approx 5,298$ correspond à l'année 2032. La vitesse du réchauffement climatique diminuera donc après 2032 donc à partir de 2033.

4. La fonction f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $[\,0\,;\,10\,]$. De plus $f(0) \approx 0$ et $f(10) \approx 2$. $1,5 \in [f(0)\,;\,f(10)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,5$ possède une unique solution notée α dans l'intervalle $[\,0\,;\,10\,]$.

À l'aide de la calculatrice on trouve $\alpha \approx 6,4$. C'est donc au cours de l'année $1900 + 6,4 \times 25 \approx 2060$ que la température terrestre atteindra d'après ce modèle son seuil critique.