1 Tirage simultané de 3 boules

Chaque tirage est une combinaison de 3 éléments pris dans un ensemble de 7 éléments : le nombre total de tirages est donc $\binom{7}{3}$.

1. Exemple numérique : choisissons $k = 5$.

Pour obtenir un tirage dont le plus grand numéro est 5, nous devons choisir deux boules dont les numéros sont compris entre 1 et 4 . Voici la liste des possibilités :

$$\begin{array}{ccc} \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} \\ \{2,3\} & \{2,4\} & \{3,4\} \end{array}$$

Il faut donc choisir deux boules distinctes dont les numéros sont compris entre 1 et 4 : il y a $\binom{4}{2}$ possibilités.

Cas général.

Pour obtenir un tirage dont le plus grand numéro est k, nous devons choisir deux boules dont les numéros sont compris entre 1 et $k-1$. Le nombre de possibilités est alors $\binom{k-1}{2}$.

2. Notons T_k l'ensemble des tirages dont le plus grand numéro est k et E l'ensemble de tous les tirages : T_k est une partie de E.

— les parties T_k sont deux à deux disjointes : pour $j \neq k$ on a $T_j \cap T_k = \emptyset$

— d'autre part E est la réunion de tous les T_k lorsque $3 \leqslant k \leqslant 7$

Autrement dit les parties T_k forment une partition de E. On en déduit :

$$\sum_{k=3}^{7} \text{card } T_k \iff \sum_{k=3}^{7} \binom{k-1}{2} = \binom{7}{3}$$

2 Sous-tangentes

1. On cherche d'abord l'équation réduite de la tangente au point M d'abscisse t. Sachant que l'exponentielle est dérivable et qu'elle est égale à sa dérivée, on obtient :

$$y = \mathrm{e}^t(x-t)+\mathrm{e}^t$$

L'abscisse de N est alors solution de

$$\mathrm{e}^t(x-t)+\mathrm{e}^t = 0 \iff x = t-1$$

La distance de P à N est enfin la valeur absolue de la différence de leurs abscisses :

$$PN = |t-(t-1)| = 1$$

2. a. On procède comme dans la question précédente. L'équation réduite de la tangente en M est

$$y = f'(t)(x-t)+f(t)$$

L'abscisse de N est alors solution de

$$f'(t)(x-t)+f(t) = 0 \iff x = t-\frac{f(t)}{f'(t)}$$

On e déduit la distance PN :

$$PN = \left|t-\left(t-\frac{f(t)}{f'(t)}\right)\right| = \left|\frac{f(t)}{f'(t)}\right|$$

Sachant f et f' strictement positives, on an déduit

$$PN = \frac{f(t)}{f'(t)}$$

b. La condition $PN = k$ se traduit par une équation différentielle :

$$(E_k) \quad \text{pour tout réel } t : \quad \frac{f(t)}{f'(t)} = k \iff f(t) = kf'(t)$$

c. D'après le cours les solutions de (E_k) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{kt}$ où C est une constante réelle arbitraire.

3 Complexes : QCM

1. L'écriture algébrique de z tel que $\overline{z}+|z|=6+2\mathrm{i}$ est

☒ $\frac{8}{3}-2\mathrm{i}$ ☐ $-\frac{8}{3}-2\mathrm{i}$ ☐ $\frac{8}{3}+2\mathrm{i}$ ☐ $-\frac{8}{3}+2\mathrm{i}$

2. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ vérifiant $|z-1|=|z+\mathrm{i}|$ est la droite d'équation :

☐ $y=x-1$ ☒ $y=-x$ ☐ $y=-x+1$ ☐ $y=x$

3. Le nombre $\left(2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n$ est réel si et seulement si n s'écrit :

☐ $3k+1$ ☐ $3k+2$ ☒ $3k$ ☐ $6k$

4. Une solution de l'équation (E) : $z=\dfrac{6-z}{3-z}$ $(z\in\mathbb{C})$ est :

☐ $-2-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ☒ $2+\mathrm{i}\sqrt{2}$ ☐ $1-\mathrm{i}$ ☐ $-1-\mathrm{i}$

5. Soit ABC équilatéral avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$. Si $z_{\mathrm{A}}=\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}}=\sqrt{3}$, alors z_{C} est égal à :

☐ $-\mathrm{i}$ ☐ $2\mathrm{i}$ ☐ $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ ☒ $\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

6. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ vérifiant $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\mathrm{i}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est inclus dans :

☐ La droite d'équation $y=-x$
☐ Le cercle de centre $\mathrm{I}(1+\mathrm{i})$ et de rayon $\mathrm{R}=\sqrt{2}$
☐ La droite d'équation $y=x$
☒ Le cercle de diamètre [AB], A et B étant les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=-2$ et $z_{\mathrm{B}}=2\mathrm{i}$.

4 Fonction irrationnelle et première bissectrice

1. a. Il s'agit de prouver une équivalence. On procède donc en deux temps.

– Supposons d'abord que $\boxed{M \in (\Gamma)}$. Par hypothèse :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad y = x - 2\sqrt{x} + 1$$

On a donc $x \geqslant 0$.
On remarque ensuite $y = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$, ce qui entraîne $y \geqslant 0$.
On peut écrire $\sqrt{y} = \left|1 - \sqrt{x}\right|$.
La racine carrée étant croissante sue $\mathbb{R}^+$, nous obtenons :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \left|1 - \sqrt{x}\right| = 1 - \sqrt{x}$$

On en déduit finalement $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \iff \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

– Supposons réciproquement $\boxed{x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1}$

On remarque d'abord que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont compris entre 0 et 1. Puisque le carré est croissant sur $\mathbb{R}^+$, il en va de même pour x et y. On vérifie :

$$y = \sqrt{y}^2 = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1$$

M est donc bien un point de (Γ).

b. Le symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$ est le point M' dont les coordonnées sont $x' = y$ et $y' = x$. Il suffit d'appliquer le résultat précédent :

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\iff x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ &\iff y' \geqslant 0 \quad x' \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{y' + \sqrt{x'}} = 1 \\ &\iff M' \in (\Gamma) \end{aligned}$$

2. a. Par hypothèse la courbe passe par $A(0,1)$ et $B(1,0)$: ces deux points sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ puisque leurs coordonnées sont échangées. Cette droite est donc la médiatrice de $[AB]$.
Supposons que Γ est un arc de cercle de centre I : ce point I est équidistant de A et de B. : il appartient donc à la droite d'équation $y = x$.
Sachant $f'(1) = 0$, on peut affirmer que l'axe des abscisses est tangent à Γ en B. Le point I appartient donc à la perpendiculaire en B à l'axe des abscisses et son abscisse est $x_I = 1$.
On en déduit que le coordonnées de I sont $x_I = y_I = 1$ et que le rayon du cercle est $IA = IB = 1$.

b. Le point $C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ appartient à (Γ) puisque $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
Calculons maintenant

$$IC^2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{9}{16} = \frac{9}{8}$$

On en déduit $IC = \frac{3\sqrt{2}}{4} \neq 1$. Donc (Γ) n'est pas un arc de cercle.

5 Exponentielle, Logarithme et tangentes

1. **a.** Les coordonnées de A sont $x_A = 0$ et $y_A = \mathrm{e}^0 = 1$. D'autre part $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
On en déduit l'équation réduite de la droite (D) tangente en A à la courbe (Φ) :

$$y = \mathrm{e}^0(x-0) + \mathrm{e}^0 \iff \boxed{y = x+1}$$

Les coordonnées de B sont $x_B = 1$ et $y_B = \ln 1 = 0$. D'autre part $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
On en déduit l'équation réduite de la droite (Δ) tangente en B à la courbe $(\Gamma$:

$$y = \frac{1}{1}(x-1) + \ln 1 \iff \boxed{y = x-1}$$

b. Les droites (D) et (Δ) ont le même coefficient directeur qui est égal à 1.
Elles sont donc parallèles.
La distance entre les deux droites est égale à la distance entre un point de l'une et son projeté orthogonal sur l'autre. Cette distance est donc la distance de A à (Δ) :

$$d(A, \Delta) = \frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

2. **a.** Soit pour tout x réel $d_1(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. Montrons que cette différence est toujours positive ou nulle.
La fonction d_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $d_1'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
Pour étudier le signe de cette dérivée, il suffit d'utiliser le fait que l'exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned}
d_1'(x) = 0 &\iff \mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0\\
d_1'(x) > 0 &\iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0\\
d_1'(x) < 0 &\iff \mathrm{e}^x < 1 \iff x < 0
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations de cette fonction :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$d_1(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction admettant un minimum en 0, on obtient pour tout x réel :

$$d_1(x) \geqslant d_1(0) = 0$$

b. Soit pour tout x réel $d_2(x) = x - 1 - \ln x$. Montrons que cette différence est toujours positive ou nulle.

La fonction d_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$ réel $d_2'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Puisque $x > 0$, cette dérivée est du signe de $x - 1$ et on en déduit le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$d_2'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$d_2(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction admettant un minimum en 0, on obtient pour tout $x > 0$:

$$d_2(x) \geqslant d_2(1) = 0$$

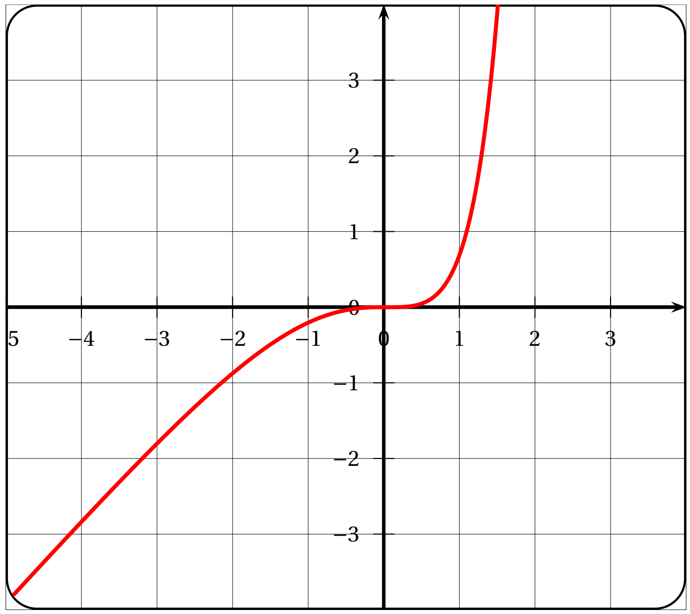
c. Intuitivement, si on relie M et N, le segment $[MN]$ coupe les tangentes (D) et (Δ) en deux points M' et N'.

D'après la question précédente, on a $M'N' \geqslant \sqrt{2}$ et donc $MN \geqslant \sqrt{2}$.

Le résultat peut être démontré rigoureusement.

6 Représentation graphique

1. Représentation de la fonction.



2. a. On peut conjecturer que la fonction est croissante sur $[-5\ ;\ 4]$.

b. On peut conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution sur cet intervalle puisqu'il semble exister un point d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.

3. a. Posons $X = \mathrm{e}^x$ et étudions le trinôme $X^2 - 2,1X + 1,1$.

Son discriminant est $\Delta = 0,01 = 0,1^2$. Il a donc deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{2,1 - 0.1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2,1 + 0.1}{2} = 1,1$$

D'après le théorème sur le signe du trinôme, ce trinôme est positif ou nul lorsque $X \leqslant 1$ ou lorsque $X \geqslant 1,1$.

On en déduit $\mathrm{e}^{2x} - 2,1x + 1,1 \geqslant 0$ si et seulement si $\mathrm{e}^x \leqslant 1$ ou $\mathrm{e}^x \geqslant 1,1$.

Cette condition est équivalente à $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant \ln 1,1$.

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2,1x + 1,1$$

Nous venons d'étudier le signe de $f'(x)$ dans la question précédente. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$\ln 1,1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\ln 1,1)$	$\nearrow$	

c. On a trouvé une solution puisque $f(0) = 0$.

D'après les variations de f, on sait que $f(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,\ln 1,1]$.

D'autre part, on sait que f est dérivable donc continue, et strictement croissante sur $[\ln 1,1;\,\ln 1,2]$: cette fonction réalise donc une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image $\left[f(\ln 1,1)\,;\,f(\ln 1,2)\right]$.

On vérifie que 0 appartient à l'intervalle image puisque :

$$f(\ln 1,1) \approx -0,00016 < 0 \quad \text{et} \quad f(\ln 1,2) \approx 0,16 > 0$$

L'équation $f(x) = 0$ a donc une solution et une seule dans l'intervalle $[\ln 1,1\,;\,\ln 1,2]$.

Il n'y a pas d'autre solution puisque f est strictement croissante sur $[\ln 1,1\,;\,+\infty[$.

En résumé l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions.

4. Il s'agit d'estimer le minimum et le maximum de la fonction sur l'intervalle proposé : on utilise pour cela les variations étudiées à la question 3 b.

On peut déjà observer que $\ln 1,1 \approx 0,095 < 0,15$.

Sur cet intervalle, le maximum est le plus grand des deux nombres $f(0) = 0$ et $f(0,15)$.

Sachant $f(0,15) \approx 0,00008 > 0$, on sait que le maximum est majoré par $0,0001$.

Le minimum de la fonction est le plus petit des deux nombres $f(-0,05)$ et $f(\ln 1,1)$.

Sachant $f(-0,05) \approx -0,00016$, ces deux nombres (et donc le minimum de la fonction) sont minorés par $-0,0002$.

Il est donc raisonnable de prendre $\boxed{-0,0002 \leqslant y \leqslant 0,0001}$.

7 Suites : Vrai/Faux

1. VRAI

Par hypothèse la suite (u_n) est positive. On en déduit pour tout n : $1+u_n \geqslant 0$ puis $v_n \geqslant 0$.
0n calcule ensuite la différence

$$1 - v_n = \frac{1}{1+u_n}$$

La remarque précédente entraîne pour tout n : $1 - v_n \geqslant 0$ et donc $v_n \leqslant 1$.

2. VRAI

Par hypothèse (u_n) a une limite finie que l'on note ℓ : les théorèmes sur les limites nous garantissent $\ell \geqslant 0$ puisque (u_n) est positive.

D'après le théorème sur la limite d'une somme, nous avons : $\lim 1+u_n = 1+\ell > 0$.

Puisque ce nombre est différent de 0, nous obtenons en appliquant le théorème sur la limite d'un quotient : $\lim v_n = \dfrac{\ell}{1+\ell}$.

La suite (v_n) est donc convergente.

3. VRAI

On a montré $1 - v_n = \dfrac{1}{1+u_n}$, ce qui implique $v_n = 1 - \dfrac{1}{1+u_n}$.

Calculons maintenant la différence entre deux termes consécutifs de (v_n) :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{1+u_n} - \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}-u_n}{(1+u_n)(1+u_{n+1})}$$

Puisque (u_n) est croissante, nous avons pour tout n : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Nous en déduisons $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et donc (v_n) croissante.

4. FAUX

Un contrexemple est obtenu en posant pour tout n : $u_n = n$. Cette suite diverge car elle tend vers $+\infty$.

Dans ce cas nous avons :

$$v_n = \frac{n}{1+n} = 1 - \frac{1}{1+n}$$

Les théorèmes sur les limites et les opérations nous donnent $\lim v_n = 1$.

Par conséquent (v_n) est convergente alors que (u_n) est divergente.

8 Géométrie dans l'espace : QCM

1. Si $A \neq B$, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ est

a. l'ensemble vide **b.** un plan **c.** une sphère

2. Soient $A(0\,;\,1\,;\,-2)$ et $B(2\,;\,1;\,0)$.
Les coordonnées du barycentre G de $(A\,;\,1)$ et $(B\,;\,3)$ sont

a. $G(6\,;\,4\,;\,-2)$ **b.** $G(1,5\,;\,1\,;\,-0.5)$ **c.** $G(0,5\,;\,1\,;\,1.5)$

3. Soit d la droite de représentation paramétrique $x = 2 - t\,;\; y = 3t\,;\; z = -3,\; t \in \mathbb{R}$.
On considère les points A$(2\,;\,3\,;\,-3)$, B$(2\,;\,0\,;\,-3)$ et C$(0;6;0)$. On a :

a. $d = (\text{AB})$ **b.** $d = (\text{BC})$ **c.** $d \neq (\text{AB})$ et $d \neq (\text{BC})$ et $d \neq (\text{CA})$

4. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& 1-t \quad t \in R \\ z &=& 1+t, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -t' \\ y &=& 2-1,5t' \quad t' \in R \\ z &=& 3+t', \end{array}\right.$$

admettent comme point commun :

a. I$(3;0;2)$ **b.** J$(2;1;1)$ **c.** K$(0\,;\,2\,;\,-3)$

5. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 \\ y &=& 1+2t \quad t \in R, \\ z &=& 1+t, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3-2t' \\ y &=& 7-4t' \quad t' \in R \\ z &=& 2-t', \end{array}\right.$$

sont :

a. parallèles **b.** sécantes **c.** non coplanaires

6. La droite de représentation paramétrique $x = -4t\,;\; y = 1+3t\,;\; z = 2+2t,\; t \in \mathbb{R}$ et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :

a. orthogonaux **b.** parallèles **c.** ni orthogonaux ni parallèles

7. L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :

a. l'ensemble vide **b.** une droite **c.** un plan

9 Fonctions trigonométriques et équations

1. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout x réel :

$$f'(x) = -\sin x + 1$$

On sait que la fonction sinus est majorée par 1, ce qui entraîne $f'(x) \geqslant 0$ et par conséquent f croissante sur $\mathbb{R}$.

- Localisation des solutions de l'équation $\cos x + x = 0$.
  On vérifie $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} < 0$ et et $f(0) = 1 > 0$.
  Puisque f est croissante, on peut écrire

$$x \leqslant -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) \leqslant f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0 \qquad \text{et} \qquad x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(0) > 0$$

  L'équation $f(x) = 0$ ne peut donc avoir de solution en dehors de l'intervalle $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$.
- Restriction à l'intervalle I.
  Le sinus étant croissant sur I, on sait : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 0 \iff 0 \leqslant -\sin x \leqslant 1$.
  On peut alors écrire : $1 \leqslant 1 - \sin x \leqslant 2$.
  Donc f' est strictement positive et f est strictement croissante sur I. De plus la fonction f est continue car dérivable :
  elle réalise donc une bijection de I sur l'intervalle image $\left[f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\ ;\ f(0)\right] = \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 1\right]$.
  L'intervalle image contenant la valeur 0, l'équation $f(x) = 0$ a une solution et un seule dans l'intervalle I.
- Valeur approchée de α.
  On procède par balayage :

$$\begin{array}{rcl}
f(-0,8) \approx -0,10 < 0 \quad \text{et} \quad f(-0,7) \approx 0,06 > 0 & \Rightarrow & -0,8 < \alpha < -0,7 \\
f(-0,74) \approx -0,002 < 0 \quad \text{et} \quad f(-0,73) \approx 0,02 > 0 & \Rightarrow & -0,74 < \alpha < -0,73 \\
f(-0,74) \approx -0,002 < 0 \quad \text{et} \quad f(-0,739) \approx 0,0001 > 0 & \Rightarrow & -0,74 < \alpha < -0,739
\end{array}$$

  On peut donc écrire $\boxed{\alpha \approx -0,739}$ à 10^{-3} près.

2. On pose pour tout x réel : $g(x) = \sin x - \dfrac{x}{2}$.

a. On déduit de $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ l'encadrement $-1 - \dfrac{x}{2} \leqslant g(x) \leqslant 1 - \dfrac{x}{2}$.
On remarque d'abord $1 - \dfrac{x}{2} < 0 \iff x > 2$. On en déduit $x > 2 \Rightarrow g(x) < 0$.
On remarque ensuite $-1 - \dfrac{x}{2} > 0 \iff x < -2$. On en déduit $x < -2 \Rightarrow g(x) > 0$.
On en déduit que les solutions de $g(x) = 0$ sont comprises entre -2 et 2.

b. Étudions maintenant les variations de g sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ (cet intervalle contient l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$).
Calculons la dérivée : $g'(x) = \cos x - \dfrac{1}{2}$.

Elle s'annule lorque $\cos x = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire lorsque $x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$.
Nous savons d'autre part que le cosinus est strictement croissant sur $[-\pi\ ;\ 0]$ et strictement décroissant sur $[0\ ;\ \pi]$. On en déduit :

$$\cos x > \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

Nous pouvons dresser le tableau de variations de g :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{\pi}{2}$	↘	$g\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	↗	$g\left(\frac{\pi}{3}\right)$	↘	$-\frac{\pi}{2}$

Dans ce tableau $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$ et $g\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6}$.
Sur $\left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$, g est continue car dérivable et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $\left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$ sur l'intervalle image $\left[g(\pi)\ ;\ g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.
L'intervalle image contient 0 car $g(\pi) = -\dfrac{\pi}{2} < 0$ et $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6} > 0$. Par conséquent l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution β sur cet intervalle.
Puisque g est impaire, l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution $-\beta$ sur l'intervalle $\left[-\pi\ ;\ -\dfrac{\pi}{3}\right]$.
Sur $\left[-\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$, g est strictement croissante et s'annule en 0 : l'équation a donc exactement une solution sur cet intervalle.
En résumé, l'équation a trois solutions $-\beta$, 0 et β sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

c. On procède par balayage :

$$\begin{array}{ccccc}
g(1,8) \approx 0,07 > 0 & \text{et} & g(1,9) \approx -0,004 < 0 & \Rightarrow & 1,8 < \beta < 1,9 \\
g(1,89) \approx 0,004 > 0 & \text{et} & g(1,9) \approx -0,004 < 0 & \Rightarrow & 1,89 < \beta < 1,9 \\
g(1,895) \approx 0,0004 > 0 & \text{et} & g(1,896) \approx -0,0004 < 0 & \Rightarrow & 1,895 < \beta < 1,896
\end{array}$$

On peut donc écrire $\boxed{\beta \approx 1,895}$ à 10^{-3} près.

10 Divisibilité, nombres premiers (spécialité) : VRAI/FAUX

1. FAUX.
   Un contrexemple est fourni par $n = 20$. Ce nombre est divisible par 4 puisque $n = 5 \times 4$.
   Ce nombre n'est pas divisible par 8 puisqu'il est strictement compris entre deux multiples consécutifs de 8 qui sont 16 et 24.
   On peut aussi remarquer que la décomposition de n en facteurs premiers comprend exactement deux facteurs premiers 2. Or, si n était divisible par 8, sa décomposition en facteurs premiers devrait contenir trois facteurs premiers 2.

2. VRAI.
   Puisque 2 et 3 sont deux nombres premiers, ils apparaissent dans la décomposition de ce nombre en facteurs premiers. Par conséquent ce nombre est divisible par leur produit qui est 6.

3. FAUX.
   Considérons le nombre $n = 12$. Il est divisible par 4 puisque $n = 3 \times 4$. Il est divisible par 6 puisque $n = 2 \times 6$.
   Il ne saurait être divisible par 24 puisque $n < 24$.

4. FAUX.
   Posons $a = 7$ et $b = 5$. Ces deux nombres sont des nombres premiers : ils sont donc premiers entre eux.
   Calculons maintenant $a + b = 12$ et $a - b = 2$. Ces deux nombres sont pairs : ils ne sont donc pas premiers entre eux.

5. VRAI.
   Soient $m = 2a + b$ et $n = 3a + 2b$. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $\delta = \text{PGCD}(m, n)$.
   Puisque d divise m et n, d divise toute combinaison linéaire de ces nombres, en particulier m et n. Donc $d \leqslant \delta$.
   De même, puisque δ divise m et n, δ divise toute combinaison linéaire de ces nombres.
   Donc δ divise $2m - n = a$ et δ divise $-3m + 2n = b$. Donc $\delta \leqslant d$.
   Finalement, nous pouvons conclure $\boxed{d = \delta}$. Par conséquent, si a et b sont premiers entre eux, alors m et n le sont également.

11 Équations de plans et calculs de distances

1. Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace. Il appartient à P si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff (x-1) \times -1 + y \times 1 + (z-1) \times 1 = 0 \iff \boxed{-x + y + z = 0}$$

2. a. Le plan (P') admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux car $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = -1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times -1 = 0$.
Les plans (P) et (P') sont donc perpendiculaires.

b. Par application du cours :

$$d = \frac{|-0+1+1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$d' = \frac{|-0+2-1+1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3. a. On résout le système formé par les deux équations cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ x+2y-z+1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & -z \\ x+2y & = & z-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & -z \\ 3y & = & -1 \end{array}\right.$$

On en déduit une représentation paramétrique de la droite d'intersection D :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{3} + t \\ y & = & -\frac{1}{3} \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

b. La droite (D) admet donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La droite (MH) est perpendiculaire à D lorsque

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \left(-\frac{1}{3} + t - 0\right) \times 1 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right) \times 0 + (t-1) \times 1 = 0 \iff t = \frac{2}{3}$$

On en déduit $H\left(\frac{1}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

c. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{MH}\left(\frac{1}{3} ; -\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$.

On en déduit $MH^2 = \frac{18}{9} = 2$ et on vérifie $d^2 + d'^2 = \frac{12}{9} + \frac{6}{9} = 2$.

12 Partage d'une aire

1. Puisque la fonction f est positive et continue, l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses , les droites $t=0$ et $t=x$ est :

$$\mathscr{A}_1 = \int_0^x e^{t-1}\,dt = \left[e^{t-1}\right]_0^x = e^{x-1} - \frac{1}{e}$$

Soit $H_x(x\,;\,0)$ le point de l'axe des abscisses d'abscisse x. L'aire du triangle IM_xH_x est :

$$\mathscr{A}_2 = \frac{H_xM_x \cdot H_xI}{2} = \frac{e^{x-1}(1-x)}{2}$$

On en déduit $g(x) = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \boxed{\dfrac{e^{x-1}(3-x)}{2} - \dfrac{1}{e}}$.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$g'(x) = \frac{e^{x-1}(3-x) - e^{x-1}}{2} = \frac{e^{x-1}(2-x)}{2}$$

D'une part l'exponentielle est strictement positive.
D'autre part $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 2-x > 0$.
Par conséquent g' est strictement positive et g est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

3.
- Soient $M_0\left(0\,;\,\frac{1}{e}\right)$ et $N_0\left(1\,;\,\frac{1}{e}\right)$.
  Par définition, $g(0)$ est l'aire du triangle IOM_0 c'est-à-dire la moitié de l'aire du rectangle OIN_0M_0.
  Or ce rectangle est inclus dans Δ et son aire est majorée par celle de Δ. Nous en déduisons :

$$2g(0) \leqslant g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt \iff g(0) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$$

- La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$: elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur l'intervalle image $[g(0)\,;\,g(1)]$.
  Considérons la moitié de l'aire de Δ : $\dfrac{g(1)}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
  Ce nombre est majoré par $g(1)$ (puisque $g(1)$ est positif) et nous venons de prouver qu'il est minoré par $g(0)$: il appartient donc à l'intervalle image $[g(0)\,;\,g(1)]$.
  On en déduit que l'équation $g(x) = \dfrac{g(1)}{2}$ admet une solution α et une seule dans $[0\,;\,1]$.

4. Posons $v = \dfrac{g(1)}{2}$. On vérifie d'abord $v = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) \approx 0,31606$.
On procède ensuite par balayage :

$$\begin{array}{ccccc} g(0,3) \approx 0,303 < v & \text{et} & g(0,4) \approx 0,346 > v & \Rightarrow & 0,3 < \alpha < 0,4 \\ g(0,33) \approx 0,315 < v & \text{et} & g(0,34) \approx 0,319 > v & \Rightarrow & 0,33 < \alpha < 0,34 \\ g(0,331) \approx 0,3157 < v & \text{et} & g(0,332) \approx 0,3161 > v & \Rightarrow & 0,331 < \alpha < 0,332 \end{array}$$

On peut donc écrire $\boxed{\alpha \approx 0,331}$ à 10^{-3} près.

13 Partage d'une aire (avec question de cours)

1. Puisque la fonction f est positive et continue, l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses , les droites $t = 0$ et $t = x$ est :

$$\mathscr{A}_1 = \int_0^x \mathrm{e}^{t-1}\,\mathrm{d}t = F(x)$$

Soit $H_x(x,0)$ le point de l'axe des abscisses d'abscisse x. L'aire du triangle IM_xH_x est :

$$\mathscr{A}_2 = \frac{H_xM_x \cdot H_xI}{2} = \frac{f(x)(1-x)}{2}$$

On en déduit $g(x) = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = F(x) + \dfrac{f(x)(1-x)}{2}$.

2. Soit x et h tels que x et $x+h \in [0\,;\,1]$.
   – On suppose $h > 0$.
   On considère le domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe, l'axe des abscisses , les droites $t = x$ et $t = x+h$: son aire est

$$\mathscr{A} = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+h) - F(x)$$

   Notons P le point de coordonnées $\big(x+h\,;\,f(x)\big)$. Puisque la fonction f est croissante, le domaine $\mathscr{D}$ contient le rectangle $M_xPH_{x+h}H_x$ et son aire est minorée par l'aire de ce rectangle :

$$f(x)\cdot(x+h-x) \leqslant \mathscr{A} \iff h\,f(x) \leqslant \mathscr{A}$$

   Notons Q le point de coordonnées $\big((x\,;\,f(x+h)\big)$. Puisque la fonction f est croissante, le domaine $\mathscr{D}$ est contenu dans le rectangle $QM_{x+h}H_{x+h}H_x$ et son aire est majorée par l'aire de ce rectangle :

$$\mathscr{A} \leqslant f(x+h)\cdot(x+h-x) \iff \mathscr{A} \leqslant h\,f(x+h)$$

   On en déduit l'encadrement $h\,f(x) \leqslant F(x+h) - F(x) \leqslant h\,f(x+h)$ et en divisant par $h > 0$ on obtient :

$$f(x) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

   Si nous faisons tendre h vers 0, nous obtenons :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x+h) = f(x)$$

   car la fonction f est continue.
   Par application du théorème des gendarmes, nous obtenons maintenant :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

– On démontre de la même façon pour $h < 0$:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

– On déduit des deux résultats précédents :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Par conséquent F est dérivable sur $[0,1]$ et $F' = f$.

3. La fonction g est dérivable en tant que somme et produit de fonctions dérivables et pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$:

$$g'(x) = f(x) + \frac{1}{2}\left[f'(x)(1-x) - f(x)\right] = \frac{f(x) + f'(x)\ (1-x)}{2}$$

On sait que f est positive et strictement croissante, ce qui implique $f(x) \geqslant 0$ et $f'(x) > 0$.

D'autre part, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a $1 - x \geqslant 0$.

On en déduit que $g'(x)$ est strictement positive et donc que g est strictement croissante sur $[0,1]$.

4. a. Soient $M_0\left(0\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et $N_0\left(1\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Par définition, $g(0)$ est l'aire du triangle IOM_0 c'est-à-dire la moitié de l'aire du rectangle OIN_0M_0.

Or ce rectangle est inclus dans Δ et son aire est majorée par celle de Δ. Nous en déduisons :

$$2g(0) \leqslant g(1) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \iff g(0) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

b. La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur$[0\ ;\ 1]$: elle réalise donc une bijection de $[0\ ;\ 1]$ sur l'intervalle image $[g(0)\ ;\ g(1)]$.

Considérons la moitié de l'aire de Δ : $\dfrac{g(1)}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$.

Ce nombre est majoré par $g(1)$ (puisque $g(1)$ est positif) et nous venons de prouver qu'il est minoré par $g(0)$: il appartient donc à l'intervalle image $[g(0)\ ;\ g(1)]$.

On en déduit que l'équation $g(x) = \dfrac{g(1)}{2}$ admet une solution α et une seule dans $[0\ ;\ 1]$.

14 Équation différentielle en électricité

A. Solutions d'une équation différentielle

1. – Montrons que toute fonction f telle que $f(t) = -\dfrac{b}{a} + C\mathrm{e}^{at}$ est solution de $y' = ay + b$.
On vérifie d'abord que pour tout réel t : $f'(t) = aC\,\mathrm{e}^{at}$.
On en vérifie ensuite que pour tout réel t : $af(t) + b = -b + aC\,\mathrm{e}^{at} + b = aC\,\mathrm{e}^{at}$.
On peut donc écrire pour tout réel t : $f'(t) = af(t) + b$.

– Montrons que la condition $f(0) = 0$ impose que la solution de $y' = ay + b$ est unique.
En effet

$$f(0) = 0 \iff -\frac{b}{a} + C\mathrm{e}^0 = 0 \iff C = \frac{b}{a}$$

– Il existe donc une fonction et une seule qui est solution de l'équation différentielle et qui vérifie $f(0) = 0$.

2. D'après la question précédente, lorsque $a = -10$ et $b = 6$, la solution de $(\mathscr{A})$ qui vérifie $f(0) = 0$ est

$$f(t) = -\frac{b}{a} + \frac{b}{a}\mathrm{e}^{at} = -\frac{b}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{at}\right) = \frac{3}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-10t}\right)$$

B. Établissement d'un courant dans une bobine.

1. En utilisant les valeurs numériques de l'énoncé, on sait que la fonction i est solution de l'équation différentielle

$$\frac{1}{2}i' + 5i = 3 \iff i' = -10i + 6.$$

On sait de plus qu'à la date $t = 0$ l'intensité est nulle, ce qui se traduit par $i(0) = 0$.

D'après l'étude faite dans la partie **A**, on peut écrire : $i(t) = \dfrac{3}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-10t}\right)$.

2. Sachant $\lim\limits_{t\to+\infty} -10t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-10t} = 0$.
En appliquant les théorèmes sur les limites et les opérations, il vient finalement

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} i(t) = \frac{3}{5}}$$

15 Étude d'une suite selon deux méthodes

1. La fonction f est définie sur $I = [0\ ;\ 1]$ car $-4 \notin I$. Elle est dérivable sur I en tant que fonction rationnelle et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2} > 0$$

Puisque $f' > 0$, f est strictement croissante sur I. On en déduit que pour tout $x \in I$:

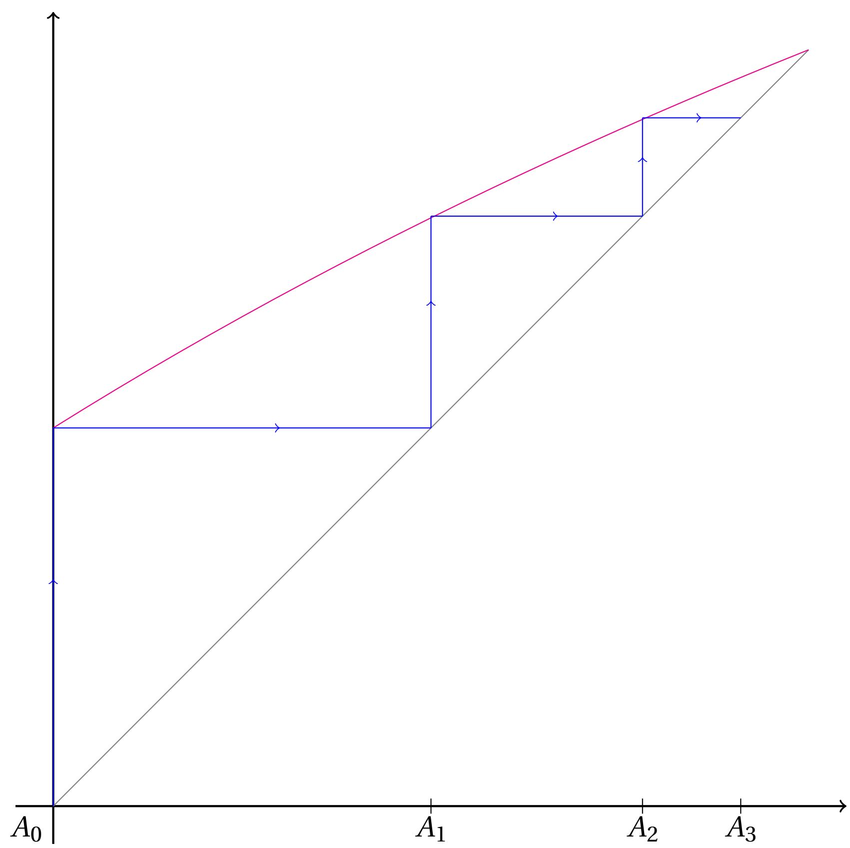
$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow f(0) = \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant f(1) = 1.$$

Par conséquent pour tout $x \in I$, on a bien $f(x) \in I$.

2. On procède par récurrence sur n.
   - Pour $n = 0$ on a $u_0 = 0 \in I$: la propriété est bien vérifiée.
   - Supposons que pour un entier n donné on ait $u_n \in I$. En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient $f(u_n) \in I$ et donc $u_{n+1} \in I$.
     La propriété est donc vérifiée pour l'entier $n+1$.
   - En conclusion, pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \in I$.

Première méthode.

1. Représentation graphique de f.



2. On peut conjecturer que (u_n) est croissante et convergente vers 1.
3. Calcul de la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$$

   On vérifie maintenant $(1 - u_n)(u_n + 2) = -u_n^2 - u_n + 2$, ce qui prouve le résultat demandé.
   On sait que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. On en déduit que les trois facteurs $(1 - u_n)$, $(u_n + 2)$ et $(u_n + 4)$ sont positifs ou nuls.
   Par conséquent la différence $u_{n+1} - u_n$ et positive ou nulle et la suite (u_n) est croissante.
4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers un réel ℓ.
   De plus $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ implique $0 \leqslant \ell \leqslant 1$ par passage à la limite dans les inégalités.
5. D'une part nous savons $\lim u_{n+1} = \lim u_n = \ell$.
   D'autre part f est continue sur I et en appliquant le théorème sur la limite de la composée d'une fonction continue et d'une suite, on obtient : $\lim f(u_n) = f(\ell)$.
   L'unicité de la limite implique $\boxed{\ell = f(\ell)}$.
   Résolvons maintenant cette équation.

$$\ell = \frac{3\ell + 2}{\ell + 4} \iff \ell^2 + \ell - 2 = 0$$

   Cette équation a deux solutions évidentes 1 et -2.
   Sachant $\ell \in I$, nous pouvons conclure $\boxed{\ell = 1}$.

Deuxième méthode.

1. On calcule v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{3u_n + 2 - (u_n + 4)}{3u_n + 2 + 2(u_n + 4)} \\ &= \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} \\ &= \frac{2}{5}\,\frac{u_n - 1}{u_n + 2} \\ &= \frac{2}{5}\, v_n \end{aligned}$$

   Par conséquent la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
2. On calcule $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$. D'après le cours $\boxed{v_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$.

3. Avant de calculer u_n, il est utile de remarquer que $v_n = 1 - \dfrac{3}{u_n+2}$.

On en déduit maintenant :

$$\frac{3}{u_n+2} = 1 - v_n \iff u_n + 2 = \frac{3}{1-v_n} \iff u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$$

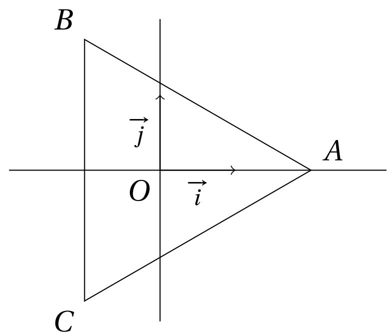
En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient finalement

$$\boxed{u_n = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$$

4. Sachant $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$, on a $\lim \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ et les théorèmes sur les limites et les opérations nous permettent de conclure $\boxed{\lim u_n = 1}$.

16 Tétraèdre

1. Figure.



2. • Calcul des côtés du triangle.

$$AB^2 = (-3)^2 + \sqrt{3}^2 = 12 \qquad BC^2 = 0^2 + (-2\sqrt{3})^2 = 12 \qquad CA^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2 = 12$$

On en déduit $AB = BC = CA$: le triangle est équilatéral.

• Calcul de la distance de O à chaque sommet.

$$OA^2 = 2^2 = 4 \qquad OB^2 = (-1)^2 + \sqrt{3}^2 = 4 \qquad OC^2 = (-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 4$$

On en déduit $OA = OB = OC = 2$: O est le centre du cercle circonscrit au triangle.

3. a. Le point $M(x, y, z)$ est équidistant de A et de B si et seulement si $AM^2 = BM^2$:

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + y^2 + z^2 = (x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 &\iff -4x + 4 = 2x + 1 - 2\sqrt{3}y + 3\\ &\iff -6x + 2\sqrt{3}y = 0\\ &\iff \sqrt{3}x - y = 0\end{aligned}$$

On obtient une équation du plan médiateur de $[AB]$.

b. Le point $M(x, y, z)$ est équidistant de B et de C si et seulement si $BM^2 = CM^2$:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)^2 + z^2 = (x+1)^2 + + \left(y+\sqrt{3}\right)^2 + z^2 &\iff -2\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}y\\ &\iff y = 0\end{aligned}$$

On obtient une équation du plan médiateur de $[BC]$.

c. Le point $M(x, y, z)$ est équidistant des trois points lorsque se coordonnées sont solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sqrt{3}x - y &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right.$$

On obtient bien l'axe $\left(O, \vec{k}\right)$.

4. S'il existe, le point D est équidistant de A , B et C : il appartient donc à l'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$.
Posons $(D(0\ ,\ 0\ ,\ k)$ et appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle AOD :

$$DA^2 = DO^2 + OA^2 = k^2 + 4$$

Le tétraèdre est donc régulier si et seulement si

$$DA^2 = AB^2 \iff k^2 + 4 = 12 \iff k = 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad k = -2\sqrt{2}$$

Puisque la troisième coordonnée de D doit être positive, il existe une solution et une seule au problème, le point $\left(D(0\ ;\ 0\ ;\ 2\sqrt{2}\right)$.

5. a. Remarquons d'abord que M est distinct de A et de B puisque les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.
Appliquons la formule de cosinus :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = AM\ BM\ \cos\widehat{AMB} \Longrightarrow \cos\widehat{AMB} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}}{AM\ BM}$$

Nous savons que par hypothèse $\overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CD}$. Nous en déduisons les coordonnées de M en fonction de λ :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+1 & = & \lambda(0+1) \\ y+\sqrt{3} & = & \lambda\left(0+\sqrt{3}\right) \\ z & = & \lambda\left(2\sqrt{2}-0\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \lambda-1 \\ y & = & \sqrt{3}(\lambda-1) \\ z & = & 2\sqrt{2}\lambda \end{array}\right.$$

On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ en fonction de λ :

$$\overrightarrow{AM}\left\{\begin{array}{c} \lambda-3 \\ \sqrt{3}(\lambda-1) \\ 2\sqrt{2}\lambda \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BM}\left\{\begin{array}{c} \lambda \\ \sqrt{3}(\lambda-2) \\ 2\sqrt{2}\lambda \end{array}\right.$$

On peut maintenant calculer leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \lambda(\lambda-3) + 3(\lambda-1)(\lambda-2) + 8\lambda^2 = 12\lambda^2 - 12\lambda + 6$$

Nous savons que C et D sont équidistants de A et B : ils appartiennent donc au plan médiateur de $[AB]$. La droite (CD) est donc incluse dans ce plan. En particulier M est équidistant de A et B et donc $MA = MB$. On en déduit :

$$AM\ BM = AM^2 = (\lambda-3)^2 + 3(\lambda-1)^2 + 8\lambda^2 = 12\lambda^2 - 12\lambda + 12$$

On obtient finalement

$$\cos\widehat{AMB} = \frac{12\lambda^2 - 12\lambda + 6}{12\lambda^2 - 12\lambda + 12} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$$

b. Le trinôme $\lambda^2 - \lambda + 1$ n'a pas de racine réelle puisque son discriminant est $\Delta = -3 < 0$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle et pour tout λ :

$$f'(\lambda) = \frac{1}{2}\,\frac{2\lambda - 1}{(\lambda^2 - \lambda + 1)^2}$$

Cette dérivée est du signe de $2\lambda - 1$ et nous pouvons dresser la tableau de variations de f :

λ	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
$f(\lambda)$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$

c. Lorsque $\lambda \in [0\,;\,1]$, le cosinus de $\widehat{AMB}$ atteint son minimum $\dfrac{1}{3}$ pour $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Puisque le cosinus est décroissant sur $[0\,;\,\pi]$, l'angle $\widehat{AMB}$ atteint son maximum pour cette valeur de λ.

Le point M est alors le milieu de $[CD]$.

d. Le maximum de $\widehat{AMB}$ est donc

$$\cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 1,23 \text{ radians} \approx 70,53°$$

17 Nombres complexes, similitudes (spécialité)

PARTIE I

1. D'après l'énoncé, on sait $A \neq E$ et $C \neq G$. D'après le cours, ces conditions suffisent pour affirmer qu'il existe une similitude plane directe S telle que S(A) = C et S(E) = G.
De plus, l'angle de cette similitude est

$$\left(\overrightarrow{\text{EA}},\ \overrightarrow{\text{GC}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{BA}},\ \overrightarrow{\text{BC}}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

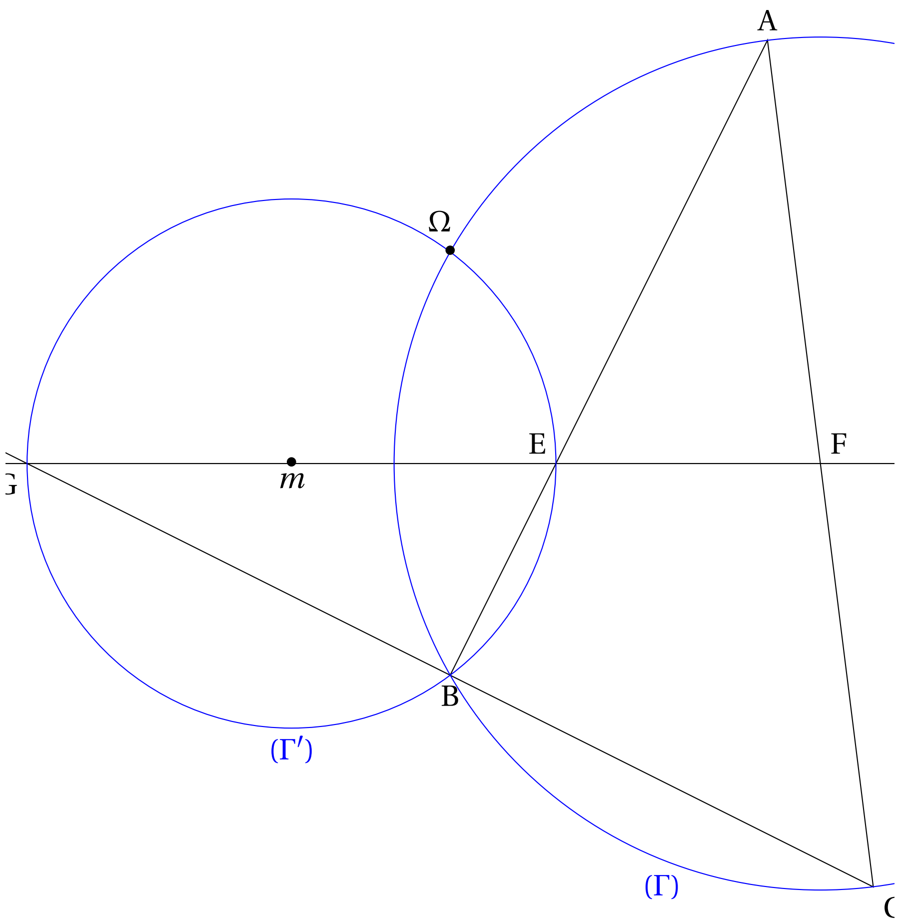
2. **a.** On remarque au préalable que ABC est rectangle en B : par conséquent Γ est le cercle de diamètre [AC]. De la même façon, Γ' est le cercle de diamètre $[EG]$.
D'après la question précédente $\left(\overrightarrow{\Omega\text{A}},\ \overrightarrow{\Omega\text{C}}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
Le triangle ΩAC est donc rectangle en Ω et le point Ω appartient au cercle de diamètre [AC], c'est-à-dire à Γ.
De la même façon $\left(\overrightarrow{\Omega\text{E}},\ \overrightarrow{\Omega\text{G}}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
Le triangle Ω EG est donc rectangle en Ω et le point Ω appartient au cercle de diamètre [EG], c'est-à-dire à Γ'.

   b. Il suffit de remarquer que $\left(\overrightarrow{\text{BE}},\ \overrightarrow{\text{BG}}\right) = \frac{\pi}{2}$, alors que l'angle de la similitude est $-\frac{\pi}{2}$.
On ne peut donc avoir Ω = B.

   c. D'après l'énoncé, les cercles Γ et Γ' se coupent en deux points distincts B et K.
Or d'après la question **2. a.**, Ω est l'un de ces deux points et d'après la question **2. b.**, Ω et B sont deux points distincts.
On peut donc conclure Ω= K.

PARTIE II

1. Figure.
Après avoir placé les points de l'énoncé, on vérifie que F est le milieu de [AC]. On trace ensuite le cercle de centre F et de rayon FA : il s'agit du cercle Γ.
On construit ensuite le point $m(-2\ ;\ 5\ ;\ 0)$ qui est le milieu de [EG] puis le cercle de centre m et de rayon mE : il s'agit du cercle Γ'.
Ces deux cercles se coupent en deux points : Ω est le point d'intersection qui est différent de B.



2. Notons $s : z \mapsto z' = az + b$ l'écriture complexe de S'. On résout :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_E & = & az_A + b \\ z_G & = & az_C + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & a(2+4\text{i}) + b \\ -5 & = & a(3-4\text{i}) + b \end{array}\right.$$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$$a(-1+8\text{i}) = 5 \iff a = \frac{5(-1-8\text{i})}{65} = \frac{-1-8\text{i}}{13}$$

On en déduit ensuite

$$b = -a(2+4\text{i}) = \frac{(1+8\text{i})(2+4\text{i})}{13} = \frac{-30+20\text{i}}{13}$$

L'écriture complexe de S' est donc $\boxed{z \mapsto z' = \dfrac{(-1-8\text{i})z - 30 + 20\text{i}}{13}}$.

Le centre Ω' de S' a pour affixe la solution de l'équation $z = az + b$:

$$(14+8\text{i})z = 10(-3+2\text{i}) \iff z = \frac{5(-3+2\text{i})(7-4\text{i})}{65} = \frac{-13+26\text{i}}{13} = \boxed{-1+2\text{i}}$$

3. On vérifie que $\Omega' \in \Gamma$: il suffit pour cela de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega' A}$ et $\overrightarrow{\Omega' C}$ sont orthogonaux. Calculons leurs coordonnées puis leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{\Omega' A}\begin{pmatrix} 2-(-1) & = & 3 \\ 4-2 & = & 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega' C}\begin{pmatrix} 3-(-1) & = & 4 \\ -4-2 & = & -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega' A}\cdot\overrightarrow{\Omega' C} = 3\times 4 + 2\times(-6) = 0$$

De la même façon, on vérifie $\Omega' \in \Gamma'$ en calculant les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega' E}$ et $\overrightarrow{\Omega' G}$ et en montrant que leur produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{\Omega' E}\begin{pmatrix} 0-(-1) & = & 1 \\ 0-2 & = & -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega' G}\begin{pmatrix} -5-(-1) & = & -4 \\ 0-2 & = & -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega' E}\cdot\overrightarrow{\Omega' G} = 1\times(-4)+(-2)\times(-2) = 0$$

Par conséquent Ω' est bien l'un de deux points d'intersection de Γ et Γ'. Les points B et Ω' sont distincts car leurs affixes sont différentes. Par conséquent Ω' et Ω sont confondus.

18 Modèles d'évolution

1. Supposons $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$.

- La fonction f est une fonction polynôme : elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème sur la limite de la composée d'une fonction continue et d'une suite nous permet d'écrire $\lim f(u_n) = f(\ell)$.
- On sait d'autre part $\lim u_{n+1} = \lim u_n = \ell$.
- D'après l'unicité de la limite d'une suite : $\boxed{f(\ell) = \ell}$.

2. a. On calcule la différence entre deux termes consécutifs de la suite :

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$$

Puisque cette différence est négative, la suite (u_n) est décroissante.

b. On procède par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}4$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
- Supposons que pour un entier n donné nous ayons $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Montrons qu'il en va de même pour l'entier $n+1$.
Nous avons au départ $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$. Nous pouvons effectuer le produit membre à membre de ces deux encadrements car tous les termes sont positifs ou nuls : $0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant 1$. Nous obtenons le résultat souhaité : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
- En conclusion, pour tout entier n : $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant 1}$.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel ℓ qui est solution de l'équation

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = \ell(1-\ell) \iff \ell^2 = 0$$

On en déduit $\boxed{\lim u_n = 0}$.

d. Sous ces hypothèses, la population de coccinelles va à terme vers son extinction.

3. a. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que fonction polynôme.
Pour tout $x \in [0,1]$: $f'(x) = 1{,}8(1-2x)$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0{,}45$	$\searrow$	0

On vérifie bien que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1{,}8}{4} = 0{,}45 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b. D'après les variations de f, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

— Montrons par récurrence que u_n est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}3$ et donc $0 \leq u_0 \leq \dfrac{1}{2}$.
- Supposons que pour un entier n donné nous ayons $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$. Montrons qu'il en va de même pour l'entier $n+1$.

  Il suffit de remarquer que $u_n \in [0, 1]$, ce qui implique $u_n + 1 = f(u_n) \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
- En conclusion, pour tout entier n : $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}}$.

— Montrons que la suite (u_n) est croissante. On calcule la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = 1{,}8u_n(1-u_n) - u_n = 0{,}8u_n - 1{,}8u_n^2 = \frac{9}{5}\ u_n\left(\frac{4}{9} - u_n\right)$$

Montrons maintenant par récurrence que la différence $\dfrac{4}{9} - u_n$ est positive.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}3$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{4}{9} \approx 0{,}444$.
- Supposons que pour un entier n donné nous ayons $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{9}$.

  Nous savons que f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et que u_n et $\dfrac{4}{9}$ appartiennent à cet intervalle. Nous en déduisons :

$$f(0) = 0 \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9} \iff 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{4}{9}$$

  L'encadrement est donc vérifié pour l'entier $n+1$.
- En conclusion, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{9}$.

On en déduit finalement que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$ puisque $u_n \geqslant 0$ et $\dfrac{4}{9} - u_n \geqslant 0$.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\dfrac{1}{2}$: elle est donc convergente vers un réel ℓ qui est solution de l'équation

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = 1{,}8\ell(1-\ell) \iff 1{,}8\ell^2 - 0{,}8\ell = 0 \iff \frac{9}{5}\ell\left(\ell - \frac{4}{9}\right) = 0$$

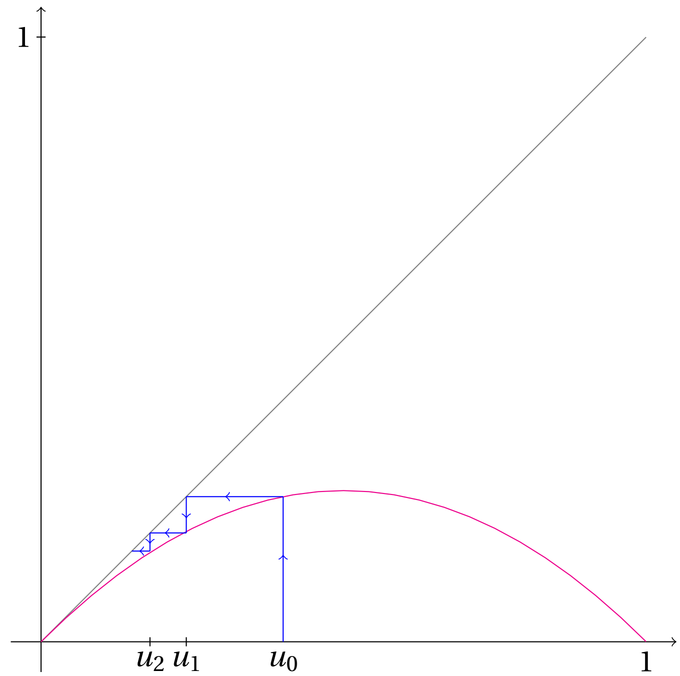
Cette équation a deux solutions 0 et $\dfrac{4}{9}$. Sachant que la suite (u_n) est croissante, elle est minorée par $u_0 = 0{,}3$, ce qui implique $\ell \geqslant 0{,}3 > 0$. On en déduit $\boxed{\lim u_n = \dfrac{4}{9}}$.

d. Sous ces hypothèses, la population de coccinelles tendra à terme vers environ 444 000 individus.

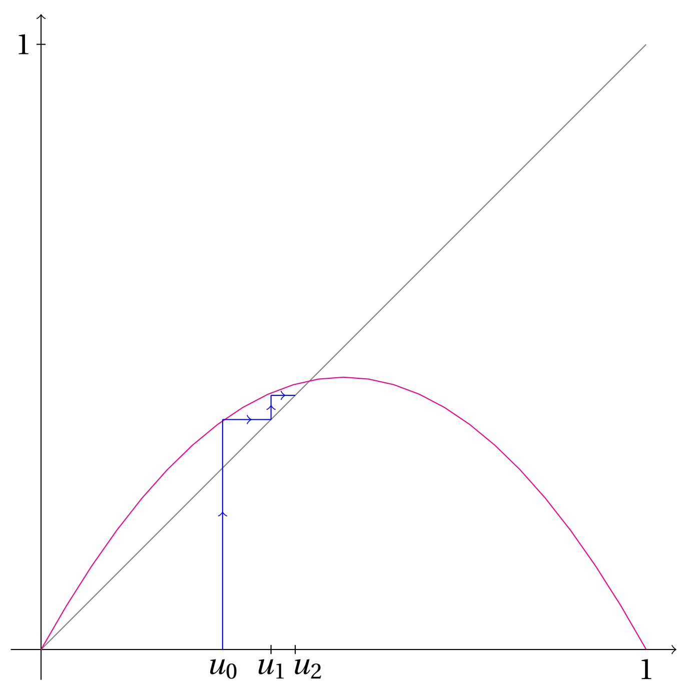
4. Sous ces hypothèses, l'effectif de la population semble alterner chaque année entre deux valeurs qui sont approximativement 800 000 individus et 512 000 individus. Pour préciser les valeurs et le comportement de la suite, on peut utiliser un tableur ou une calculatrice.

Feuilles annexes

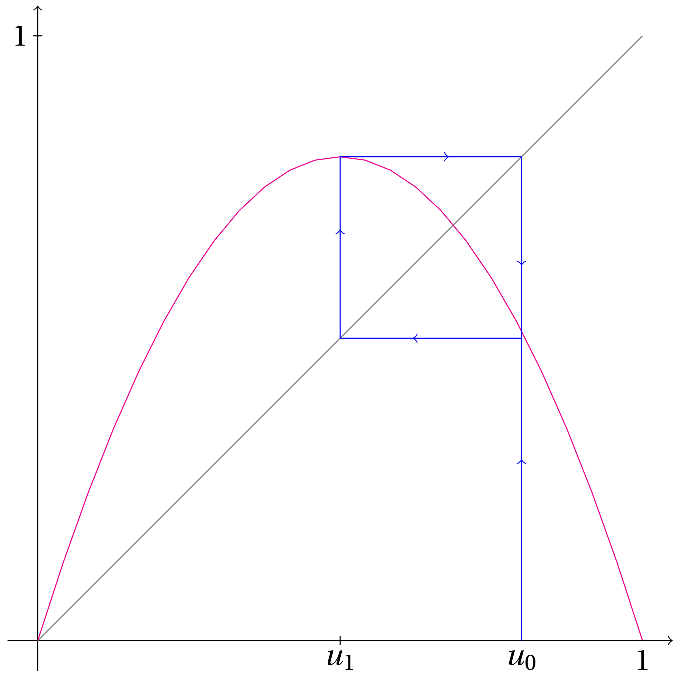
1^er^ cas : $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.



2^e^ cas : $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.



3^e^ cas : $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.



19 Une pyramide dans le cube

1. Dans le repère choisi :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{i}} \iff B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{i}} + \overrightarrow{\mathrm{j}} \iff C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

On en déduit les coordonnées du milieu I de $[BC]$: $I\begin{pmatrix}\dfrac{1+1}{2} & = & 1\\ \dfrac{0+1}{2} & = & 1/2\\ \dfrac{0+0}{2} & = & 0\end{pmatrix}$

On établit de même :

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \mathrm{H}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}\begin{pmatrix}0\\1\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \mathrm{F}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$$

2. Calculons d'abord les coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{\mathrm{IK}}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{IM}}\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires puisque leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : les trois points I, K et M ne sont donc pas colinéaires et il existe un plan et un seul passant par ces points.
Déterminons maintenant une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ = (IKM).
Nous cherchons un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à ce plan, c'est-à-dire orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$.
Soit $\overrightarrow{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$. Ses coordonnées sont solution du système :

$$\begin{cases} -a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2} & = & 0\\ -\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}+c & = & 0\end{cases} \iff \begin{cases} b+c & = & 2a\\ -b+2c & = & a\end{cases} \iff \begin{cases} b+c & = & 2a\\ 3c & = & 3a\end{cases} \iff \begin{cases} b & = & a\\ c & = & a\end{cases}$$

Les solutions de ce système sont les triplets $(t\,;\,t\,;\,t)$ où t est un réel quelconque. On peut donc prendre $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ comme vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
Soit P(x; y ; z) un point quelconque de l'espace.

$$\mathrm{P}\in\mathscr{P} \iff \overrightarrow{\mathrm{IP}}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \iff (x-1)\times 1+\left(y-\frac{1}{2}\right)\times 1 + z\times 1 = 0 \iff \boxed{x+y+z=\frac{3}{2}}$$

On calcule maintenant les coordonnées des points J, L et N :

$$J\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix} \qquad N\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$$

Il est alors immédiat de vérifier que les coordonnées de chacun de ces points vérifient l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$: les points I, J, K, L et M appartiennent donc à $\mathscr{P}$.

3. On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{i}} + \overrightarrow{\mathrm{j}} + \overrightarrow{\mathrm{k}} \iff \overrightarrow{\mathrm{AG}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On déduit $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{n}$: le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est bien normal au plan $\mathscr{P}$.

4. Puisque la droite (AG) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, le projeté orthogonal d'un point quelconque de $\mathscr{P}$ sur (AG) est le point d'intersection T de cette droite et de ce plan.
Puisque T est un point de (AG) , il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{AT}} = k\overrightarrow{\mathrm{AG}}$. On peut calculer les coordonnées de T en fonction du paramètre k :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_T - x_A &=& k(x_G - x_A)\\ y_T - y_A &=& k(y_G - y_A)\\ z_T - z_A &=& k(z_G - z_A)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_T &=& k\\ y_T &=& k\\ z_T &=& k\end{array}\right.$$

Puisque T est un point de $\mathscr{P}$, ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan :

$$k + k + k = \frac{3}{2} \iff k = \frac{1}{2}$$

Par conséquent $\mathrm{T}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ est le projeté orthogonal des six points I, J, K, L, M, N sur la droite (AG).

5. Montrons que I, J, K, L, M et N appartiennent à un même cercle de centre T.

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{TI}^2 &=& (1-1/2)^2 + (1/2-1/2)^2 + (0-1/2)^2 &=& 1/2\\ \mathrm{TJ}^2 &=& (1/2-1/2)^2 + (1-1/2)^2 + (0-1/2)^2 &=& 1/2\\ \mathrm{TK}^2 &=& (0-1/2)^2 + (1-1/2)^2 + (1/2-1/2)^2 &=& 1/2\end{array}$$

On en déduit $\boxed{\mathrm{TI} = \mathrm{TJ} = \mathrm{TK} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

On vérifie ensuite que T est milieu de [IL], [JM] et [KN], ce qui implique $\boxed{\mathrm{TL} = \mathrm{TM} = \mathrm{TN} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

Les six points appartiennent au cercle de centre T et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrons maintenant que les côtés de l'hexagone IJKLMN mesurent tous $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{TK}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\begin{pmatrix} x_J - x_I & = & 1/2-1 & = & -1/2 \\ y_J - y_I & = & 1-1/2 & = & 1/2 \\ z_J - z_I & = & 0-0 & = & 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{TK}}\begin{pmatrix} x_K - x_T & = & 0-1/2 & = & -1/2 \\ y_K - y_T & = & 1-1/2 & = & 1/2 \\ z_K - z_T & = & 1/2-1/2 & = & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overrightarrow{\mathrm{TK}}$: IJKT est un parallélogramme. Par conséquent

$$\mathrm{IJ} = \mathrm{TK} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{JK} = \mathrm{IT} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

puisque T est milieu de $[IL]$, on peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{TL}} = \overrightarrow{\mathrm{IT}} = \overrightarrow{\mathrm{JK}}$: le quadrilatère TJKL est un parallélogramme. Par conséquent :

$$\mathrm{LK} = \mathrm{TJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc démontré $\boxed{\mathrm{IJ} = \mathrm{JK} = \mathrm{KL} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.
Considérons maintenant dans le plan $\mathscr{P}$ la symétrie de centre T : cette transformation échange I, et L, J et M, ainsi que K et N. Or une symétrie centrale est une isométrie et on obtient

$$\mathrm{LM} = \mathrm{IJ} \qquad \mathrm{MN} = \mathrm{JK} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{NI} = \mathrm{KL}.$$

On en déduit $\boxed{\mathrm{LM} = \mathrm{MN} = \mathrm{NI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

6. Calculons d'abord l'aire du triangle équilatéral TIJ de côté $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

- sa base est $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- sa hauteur est $h = a\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$
- son aire est donc $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

On en déduit l'aire de l'hexagone (qui est la base de la pyramide) : $\boxed{6\mathscr{A} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$.
Calculons maintenant la hauteur de la pyramide c'est-à-dire la distance de G au plan $\mathscr{P}$:

$$d = \frac{|1+1+1-3/2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3/2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On en déduit le volume de la pyramide $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\dfrac{3}{8}}$.

Comme le volume du cube est égal à 1, le volume de la pyramide est égal aux trois huitièmes du volume du cube.

20 Fonctions vérifiant certaines conditions

1. **a.** On peut écrire pour tout x réel : $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(a + \dfrac{b}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{c}{\mathrm{e}^{2x}}\right)$.

   On sait que, d'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$. Les théorèmes sur les limites et les opérations nous donnent alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a + \frac{b}{\mathrm{e}^x} + \frac{c}{\mathrm{e}^{2x}} = a$.

   Il est donc nécessaire que a soit strictement positif : sinon on aurait $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

   Les deux conditions $f(x) = 0$ et $f(\ln 2) = 0$ se traduisent par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0\\ 4a+2b+c &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& -c\\ 4a+2b &=& -c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& -c\\ 2a &=& c \end{array}\right.$$

   Ce système a pour solutions tous les triplets $(t/2\ ;\ -3t/2\ ;\ t)$ où $t \in R$. Par exemple, le triplet $(1\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est un triplet solution qui vérifie de plus $a > 0$.

   En conclusion, la fonction $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 2}$ vérifie les conditions de l'énoncé.

   b. Les fonctions f définies par $f(x) = k \ln x$ où k est un paramètre réel vérifient la deuxième condition :

$$f(xy) = k\ \ln(xy) = k(\ln x + \ln y) = k\ \ln x + k\ \ln y = f(x) + f(y)$$

   Pour ces fonctions, la première condition se traduit par

$$f(2) = 4 \iff k\ \ln 2 = 4 \iff k = \frac{4}{\ln 2}$$

   En conclusion, la fonction $\boxed{f(x) = \dfrac{4\ \ln x}{\ln 2}}$ vérifie les conditions de l'énoncé.

   c. On sait que la valeur moyenne d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 est égale à 0. Il suffit donc de choisir une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 qui soit impaire, par exemple $f(x) = x^3$.

   Vérifions le résultat dans ce cas : $\mu = \dfrac{1}{2-(-2)}\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^4 - (-2)^4}{16} = 0.$

   En conclusion, la fonction $\boxed{f(x) = x^3}$ vérifie les conditions de l'énoncé.

2. **a.** OUI

   Une primitive de g' étant g, on calcule $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\mathrm{d}x = g(1) - g(0)$.

   La condition de l'énoncé se traduit par $g(1) = g(0)$. Or nous lisons graphiquement que les deux points de la courbe d'abscisses 0 et 1 ont la même ordonnée 0.

   b. OUI

   On observe graphiquement que le minimum de g est minoré par $-1/2$. Autrement dit, pour tout $x \in [-1, 1]$: $f(x) \geqslant -1/2$.

   Nous pouvons intégrer cette inégalité sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

21 Suites : QCM

On considère trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :

- ☐ la suite (w_n) tend vers $-\infty$
- ☒ la suite (u_n) est majorée
- ☒ la suite (u_n) tend vers $-\infty$
- ☐ la suite (w_n) n'a pas de limite

2. Si pour tout n, $u_n \geqslant 1$ et $w_n = 2u_n$ et si $\lim u_n = \ell$, alors :

- ☐ $\lim v_n = \ell$
- ☐ la suite (w_n) tend vers $+\infty$
- ☒ $\lim(w_n - u_n) = \ell$
- ☒ on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non

3. Si $\lim u_n = -2$ et $\lim w_n = 2$, alors :

- ☒ la suite (v_n) est majorée
- ☐ $\lim v_n = 0$
- ☐ la suite (v_n) n'a pas de limite
- ☒ on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non

4. Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$ alors :

- ☐ $\lim w_n = 0$
- ☒ $\lim v_n = 2$
- ☒ $\lim u_n = 2$
- ☐ la suite (v_n) n'a pas de limite

22 Étude d'une fonction

Partie A

1. On sait que pour tout $x > 0$, on a : $\sqrt{x} = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ et $e^{1-x} = \dfrac{e}{e^x}$. On peut donc écrire :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}\,\frac{e}{e^x} = \frac{e}{\sqrt{x}}\,\frac{x}{e^x}$$

Par application du cours, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ entraîne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{\sqrt{x}} = 0$.

Le théorème sur la limite d'un produit nous donne alors le résultat : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

On peut alors affirmer que $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x > 0$:

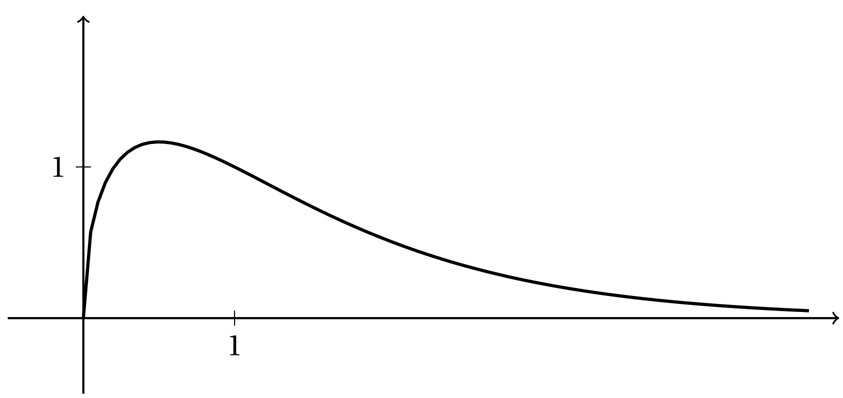
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{1-x} - \sqrt{x}e^{1-x} = \frac{(1-2x)e^{1-x}}{2\sqrt{x}}$$

3. Puisque $\sqrt{x}$ et e^{1-x} sont strictement positifs sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1-2x$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\approx 1,166$	$\searrow$	0

La fonction admet pour maximum $f(1/2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e^{1/2} = \dfrac{\sqrt{2e}}{2}$.

4. Figure.



Partie B

1. Puisque f est positive, u_n est l'aire du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$. Cette aire est mesurée en unités d'aire (1u.a. = 4cm^2).
2. Sachant f décroissante sur $[1/2, +\infty[$, on peut écrire pour tout n :

$$t \in [n, n+1] \Longrightarrow f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$$

En intégrant cet encadrement, on obtient :

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t$$

Il vient finalement en remarquant que pour toute constante k, $\displaystyle\int_n^{n+1} k\,\mathrm{d}t = k\,[t]_n^{n+1} = k$:

$$\boxed{f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)}$$

3. On déduit du résultat précédent pour tout $n \geqslant 1$: $u_{n+1} \leqslant f(n+1) \leqslant u_n$.
La suite (u_n) est donc décroissante.
4. La suite (u_n) est positive : elle est donc minorée par 0. Elle est de plus décroissante : elle est donc convergente.
On a démontré dans la partie **A** : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Ce résultat implique $\lim f(n) = \lim f(n+1) = 0$. Par application du théorème des gendarmes, il vient $\boxed{\lim u_n = 0}$.

Partie C

1. **a.** Par application de la linéarité des intégrales définies, le taux d'accroissement de F au point x est :

$$T(h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On cherche la limite de ce taux lorsque h tend vers 0.

- Supposons $h > 0$.
Puisque f est décroissante sur $[1, +\infty[$, nous avons pour tout $t \in [x, x+h]$:

$$f(x+h) \leqslant f(t) \leqslant f(x)$$

Il vient en intégrant cet encadrement : $\displaystyle\int_x^{x+h} f(x+h)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t$.

En remarquant que pour toute constante k, $\displaystyle\int_x^{x+h} k\,\mathrm{d}t = k\,[t]_x^{x+h} = hk$, on obtient :

$$h\,f(x+h) \leqslant F(x+h) - F(x) \leqslant h\,f(x)$$

Il vient alors en divisant par $h > 0$: $\boxed{f(x+h) \leqslant T(h) \leqslant f(x)}$.

- Supposons maintenant $h<0$.
Puisque f est décroissante, nous avons pour tout $t \in [x+h, x]$:

$$f(x+h) \geqslant f(t) \geqslant f(x)$$

Il vient en intégrant cet encadrement : $\displaystyle\int_{x+h}^{x} f(x+h)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x+h}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x+h}^{x} f(x)\,\mathrm{d}t$.
On obtient maintenant en appliquant la remarque faite au cas précédent :

$$-h\,f(x+h) \geqslant F(x)-F(x+h) \geqslant -h\,f(x)$$

Il vient alors en divisant par $-h>0$: $\boxed{f(x+h) \geqslant T(h) \geqslant f(x)}$.

On sait que f est continue et donc que $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.

Dans les deux cas, le théorème des gendarmes donne donc : $\displaystyle\lim_{h\to 0} T(h) = f(x)$.

Par conséquent F est dérivable en x et $\boxed{F'(x) = f(x)}$.

b. Puisque $F' = f$ est strictement positive sur $[1, +\infty[$, F est strictement croissante sur cet intervalle.

2. a. Pour tout $t \geqslant 0$, on peut écrire : $\left(t-\sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0$. On obtient en développant :

$$t-2\sqrt{2}\sqrt{t}+2 \geqslant 0 \iff t+2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$$

b. On déduit de la question précédente : $\sqrt{t} \leqslant \dfrac{t+2}{2\sqrt{2}}$. En multipliant par $\mathrm{e}^{1-t}>0$, on peut écrire $f(t) \leqslant \dfrac{(t+2)\mathrm{e}^{1-t}}{2\sqrt{2}}$.

Il vient finalement en intégrant cette inégalité sur $[1, x]$: $\boxed{F(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\displaystyle\int_1^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t}$.

c. Posons $u(t) = t+2$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{1-t}$.
Ces deux fonctions sont dérivables : $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{1-t}$.
Ces deux dérivées sont continues car elle-mêmes dérivable. Nous pouvons appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_1^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-(t+2)\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x - \int_1^x -\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-(t+2)\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x - \left[e^{1-t}\right]_1^x \\
&= \left[-(t+3)\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x \\
&= \boxed{4-(x+3)\mathrm{e}^{1-x}}
\end{aligned}$$

d. D'une part, F croissante implique pour tout $x \geqslant 1$: $F(x) \geqslant F(1) = 0$.

D'autre part, par application des questions **C. 2. b** et **c** : $F(x) \leqslant \dfrac{4-(x+3)\mathrm{e}^{1-x}}{2\sqrt{2}}$.

Puisque $(x+3)\mathrm{e}^{1-x} > 0$, on en déduit : $F(x) \leqslant \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

En conclusion, nous avons prouvé $\boxed{0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}}$.

3. Par application de la linéarité des intégrales définies :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = F(n)$$

Calculons la différence entre deux termes consécutifs : $S_{n+1} - S_n = u_n \geqslant 0$. La suite (S_n) est donc croissante.
D'après la question précédente, la suite (S_n) vérifie $0 \leqslant S_n = F(n) \leqslant \sqrt{2}$.
La suite (S_n) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$, donc convergente vers un réel ℓ.
Par passage à la limite dans l'encadrement précédent, nous obtenons $\boxed{0 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{2}}$.

23 La diagonale du cube

1. On utilise la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire :

$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right) = -\overrightarrow{AE}^2 + \overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{E}F$$

Puisque $\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{EF}$, il vient : $\boxed{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF} = -a^2}$.
De la même façon :

$$\begin{array}{lllllll}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} & = & \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\right) & = & \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF} & = & \boxed{a^2}\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF} & = & \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\right) & = & \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF} & = & \boxed{0}\end{array}$$

2. On additionne les trois produits scalaires calculés dans la question précédente :

$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF} = -a^2+a^2+0=0 \iff \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AF}=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont donc orthogonaux.

3. Puisque $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (AFH), il est orthogonal à tout vecteur de ce plan : la droite (EC) est donc perpendiculaire au plan (AFH).

Le projeté orthogonal de E sur (AFH) est donc le point d'intersection de (EC) et de (AFH), c'est-à-dire le point I.

4. **a.** Calculons le produit scalaire :

$$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EH}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right) = \overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EF}=0$$

Les droites (EH) et (AF) sont orthogonales.

Sachant I $\in$ (EC), nous pouvons écrire $\overrightarrow{EI} = k\overrightarrow{EC}$ et en appliquant le résultat de la question **2.** :

$$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AF}=0$$

Les droites (EI) et (AF) sont orthogonales.

b. En utilisant les deux résultats précédents, on obtient :

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{A}F\cdot\left(\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{EH}\right) = \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EH}=0$$

Les droites (AF) et (HI) sont orthogonales.

c. On commence par prouver que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{AH}$:

$$\begin{array}{lll}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AH} & = & \overrightarrow{EF}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}\right) = \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH}=0\\ \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AH} & = & k\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{array}$$

En utilisant ces deux résultats, il vient :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AH} \cdot \left(\overrightarrow{EI} - \overrightarrow{EF}\right) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EI} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$$

Les droites (AH) et (FI) sont orthogonales.

5. Nous venons de montrer que (HI) et (FI) sont deux hauteurs du triangle AFH : le point I est donc l'orthocentre de ce triangle.

24 Géométrie dans l'espace : calculs de barycentre et de volume

1. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{A}}B$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}}C$ puis leur produit scalaire.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 1-(-1) & = & 2\\ 4-0 & = & 4\\ -1-1 & = & -2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} 3-(-1) & = & 4\\ -4-0 & = & -4\\ -3-1 & = & -4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 8-16+8=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ étant orthogonaux, le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** Calculons les deux produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SO}} &= 2\times-4+4\times0-2\times-4=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SO}} &= 4\times-4-4\times0-4\times-4=0\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{SO}}$ est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

b. Puisque $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{SO}}$ est normal au plan (ABC).
Soit M(x; y; z) un point quelconque de l'espace. Il appartient au plan (ABC) si et seulement si

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SO}}=0 \iff (x+1)\times-4+y\times0+(z-1)\times-4=0 \iff \boxed{x+z=0}$$

3. **a.** Nous cherchons trois réels a , b et c tels que :

$$a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad a+b+c\neq0$$

Le triplet $(a\,;\ b\,;\ c)$ est donc solution du système $\left\{\begin{array}{rcl} -a+b+3c &=& 0\\ 4b-4c &=& 0\\ a-b-3c &=& 0\end{array}\right.$

La première et la troisième équation étant équivalentes, le système se réduit à

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a+b+3c &=& 0\\ 4b-4c &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b &=& 3c\\ b &=& c\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 4c\\ b &=& c\end{array}\right.$$

Les solutions de ce système sont les triplets $(4t\,;\ t\,;t)$ où $t\in R$. En particulier $(4\,;\ 1\,;1)$ et un triplet solution tel que $4+1+1\neq0$.
En conclusion, O est le barycentre du système (A ; 4), (B ; 1), (C ; 1).

b. On sait que le barycentre de trois points appartient à tout plan qui les contient.
Donc O appartient au plan (ABC).
De plus les trois coefficients du système sont de même signe : le point O appartient donc à l'intérieur du triangle ABC.

4. D'après la question **2. a**, O est le projeté orthogonal du point S sur le plan ABC. On peut donc prendre comme base du tétraèdre le triangle ABC et comme hauteur la distance SO.

- Calcul de l'aire de la base : $\mathscr{A} = \dfrac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}}{2}$

  On vérifie $\mathrm{AB} = \sqrt{2^2+4^2+(-2)^2} = 2\sqrt{6}$, $\quad \mathrm{AC} = \sqrt{4^2+(-4)^2+4^2} = 4\sqrt{3}$ $\quad$ et $\mathscr{A} = 12\sqrt{2}$.
- Calcul de la hauteur : $h = OS = \sqrt{4^2+0^2+4^2} = 4\sqrt{2}$.

On en déduit le volume du tétraèdre : $\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{A} \times h}{3} = \dfrac{12\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{3} = \boxed{32}$.

25 Fonction irrationnelle, méthode d'Euler

Partie A

Tableau numérique.

u_n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_n	1	1,1	1,191	1,275	1,353	1,427

Partie B

1. La condition $f(x)f'(x) = 1$ implique $f(x) \neq 0$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \geqslant 0$.
   La fonction f ne peut donc s'annuler.
2. Puisque f est dérivable, elle est continue sur $[0, +\infty[$.
   Or si $f(0) = 1$ et s'il existe $a > 0$ tel que $f(a) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires implique que f s'annule au moins une fois sur $[0, a]$.
3. Supposons que f prend une valeur strictement négative : d'après la question **B 2.** f s'annule, ce qui est en contradiction avec le résultat de la question **B 1.**
   On en déduit $f \geqslant 0$. Mais puisque f ne peut s'annuler, on a bien $\boxed{f > 0}$.

Partie C

1. Si u est dérivable sur un intervalle I, alors $\boxed{\dfrac{u^2}{2}}$ est une primitive de u sur cet intervalle.
2. Les deux fonctions $x \longmapsto \dfrac{f(x)^2}{2}$ et $x \longmapsto x$ ont la même dérivée sur I.
   Elles diffèrent donc d'une constante sur cet intervalle.
   On peut donc écrire pour tout $x \geqslant 0$: $f(x)^2 = 2x + k$ ou k est une constante réelle.
3. La condition $f(0) = 1$ implique $k = 1$.
   Sachant $f > 0$, on peut écrire pour tout $x \geqslant 0$: $\boxed{f(x) = \sqrt{2x+1}}$.
4. Tableau numérique.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	1,095	1,183	1,265	1,342	1,414

On constate la proximité des valeurs obtenues dans les deux tableaux : l'erreur est majorée par 0,02.

26 Exemple de codage (spécialité)

1. **a.** On vérifie de façon immédiate : $7 \times 2 - 13 \times 1 = 14 - 13 = 1$.
   Le couple $(u, v) = (2, 1)$ est donc solution de l'équation.

   b. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par 4, on obtient :

$$7 \times 8 - 13 \times 4 = 4 \iff 14 \times 4 - 26 \times 2 = 4.$$

   Le couple $(u_0, v_0) = (4, 2)$ est donc solution de l'équation.

   c. D'après la question précédent (u_0, v_0) est une solution particulière de l'équation

$$\text{(E)} \quad 14a - 26k = 4.$$

   - Supposons d'abord que $(a,\ k)$ est un couple solution de (E) :

$$14a - 26k = 14u_0 - 26v_0 \iff 7a - 13k = 7u_0 - 13v_0 \iff 7(a - u_0) = 13(k - v_0)$$

     On en déduit que 7 divise le produit $13(k - v_0)$.
     Or, nous savons que 7 et 13 sont premiers entre eux et d'après le théorème de Gauss, on en déduit que 7 divise le facteur $k - v_0$.
     Il existe donc un entier relatif t tel que $k - v_0 = 7t$. On en déduit maintenant :

$$7(a - u_0) = 13 \times 7t \iff a - u_0 = 13t.$$

     Par conséquent tout couple (a, k) qui est solution de (E) vérifie

$$a = u_0 + 13t \quad \text{et} \quad k = v_0 + 7t \qquad \text{où} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

   - Vérifions que tout couple $(u_0 + 13t,\ v_0 + 7t)$ où $t \in \mathbb{Z}$ est bien solution de (E) :

$$14(u_0 + 13t) - 26(v_0 + 7t) = 14u_0 - 26v_0 + 182 - 182 = 14u_0 - 26v_0 = 4$$

   - En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(4 + 13t, 2 + 7t)$ où $t \in \mathbb{Z}$.

2. **a.** L'entier associé à la lettre F est 5 et l'entier associé à la lettre K est 10 : par conséquent le reste de la division euclidienne de $5a + b$ par 26 est 10.
   L'entier associé à la lettre T est 19 et l'entier associé à la lettre O est 14 : par conséquent le reste de la division euclidienne de $19a + b$ par 26 est 14.
   Ces deux résultats se traduisent par

$$\text{(S)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} 5a + b & \equiv & 10 & \text{modulo } 26 \\ 19a + b & \equiv & 14 & \text{modulo } 26 \end{array} \right.$$

b. Par soustraction membre à membre des deux lignes du système précédent, on obtient : $14a \equiv 4$ modulo 26. Il existe donc un entier relatif k tel que

$$14a = 4 + 26k \iff 14a - 26k = 4.$$

c. Supposons que (a, b) est un couple solution du système (S).

D'après la question **2. b**, il existe un entier relatif k tel que (a, k) est solution de (E) et d'après la question **1.** on peut écrire $a = 4 + 13t$ où $t \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que si a est compris entre 0 et 25 il ne peut valoir que 4 ou 17.

- Si $a = 4$, alors la première équation de (S) implique $b \equiv -10 \equiv 16$ modulo 26. Puisque b est compris entre 0 et 25, on en déduit $b = 16$.
- Si $a = 17$, alors la première équation de (S) implique $b \equiv -75 \equiv 3$ modulo 26. Puisque b est compris entre 0 et 25, on en déduit $b = 3$.

Donc les couples solutions de (S) ne peuvent être que (4, 16) ou (17, 3).

Pour terminer, on vérifie que chacun de ces deux couples est effectivement solution de (S).

3. a.
- G est associé à $n = 6$ et $17 \times 6 + 3 = 105 \equiv 1$ modulo 26.
  Donc G est codé B
- A est associé à $n = 0$ et $17 \times 0 + 3 = 3 \equiv 3$ modulo 26.
  Donc A est codé D
- U est associé à $n = 20$ et $17 \times 20 + 3 = 343 \equiv 5$ modulo 26.
  Donc U est codé F
- S est associé à $n = 18$ et $17 \times 18 + 3 = 309 \equiv 23$ modulo 26.
  Donc S est codé X.

Finalement GAUSS est codé BDFXX

b. La condition $\varphi(n) = \varphi(p)$ se traduit par

$$17n + 3 \equiv 17p + 3 \quad \text{modulo } 26 \iff 17(n - p) \equiv 0 \quad \text{modulo } 26.$$

Supposons que n et p sont les entiers associés à deux lettres de l'alphabet. Si le code de ces deux lettres est le même, alors 26 divise le produit $17(n - p)$. Or 26 est premier avec 17 : d'après le théorème de Gauss, 26 divise $n - p$.

On en déduit que $|n - p|$ est un multiple de 26. Or, puisque n et p sont compris entre 0 et 25, le nombre $|n - p|$ est un multiple positif de 26 qui est strictement inférieur à 26 : on en déduit $|n - p| = 0$ et donc $n = p$.

Si le code de deux lettres est le même, alors ces deux lettres sont identiques.

De façon équivalente, si deux lettres sont différentes, leurs codes sont différents.

4. a. On calcule $23\varphi(n) + 9 - n$:

$$23(17n + 3) + 9 - n = 390n + 78 = 26(15n + 3) \equiv 0 \quad \text{modulo } 26$$

b. Pour décoder $\varphi(n)$ il suffit donc de calculer le reste de $23\varphi(n) + 9$ modulo 26 : ce nombre est égal à n d'après la remarque de la question précédente.

c. Le message « KTGZDO ». est le code de « FERMAT ».

27 Probabilités et lois continues

1. D'après l'énoncé :

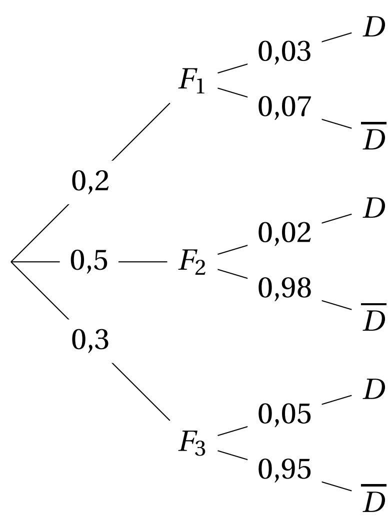
$p\,(F_1) = 0{,}2$ $\qquad p\,(F_2) = 0{,}5$ $\qquad p\,(F_3) = 0{,}3$

$p\left(\overline{D} \mid \mathrm{F}_1\right) = 0{,}97$ $\qquad p\left(\overline{D} \mid \mathrm{F}_2\right) = 0{,}98$ $\qquad p\left(\overline{D} \mid \mathrm{F}_3\right) = 0{,}95$

Par application du cours, on en déduit :

$p\,(D \mid \mathrm{F}_1) = 0{,}03$ $\qquad p\,(D \mid \mathrm{F}_2) = 0{,}02$ $\qquad p\,(D \mid \mathrm{F}_3) = 0{,}05$

On résume les données dans un arbre de probabilités :



a. Puisque les trois évènements F_1, F_2 et F_3 forment une partition de l'univers, on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(D) &= p\,(D \cap F_1) + p\,(D \cap F_2) + p\,(D \cap F_3) \\ &= p\,(F_1)\;\; p\,(D \mid F_1) + p\,(F_2)\;\; p\,(D \mid F_2) + p\,(F_3)\;\; p\,(D \mid F_3) \\ &= 0{,}2 \times 0{,}03 + 0{,}5 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}05 \\ &= \boxed{0{,}031} \end{aligned}$$

b. On veut calculer $p\,(F_1 \mid D) = \dfrac{p\,(F_1 \cap D)}{p(D)}$.

La probabilité de l'intersection a été calculée dans la question précédente.

On en déduit : $p\,(F_1 \mid D) = \dfrac{0{,}006}{0{,}031} = \dfrac{6}{31} \approx \boxed{0{,}194}$.

2. On répète 12 fois la même expérience - choisir une ampoule au hasard - en supposant les résultats indépendants.

On reconnaît le schéma de Bernoulli où les paramètres sont $n = 12$, $p = 0{,}031$ et $q = 0{,}969$.

On en déduit :

$$p(R)=\binom{12}{0}q^{12}+\binom{12}{1}p\,q^{11}=0{,}969^{12}+12\times 0{,}031\times 0{,}969^{11}\approx\boxed{0{,}948}$$

3. On a en général :

$$p(T\leqslant x)=\int_0^x \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

On en déduit $p(T\geqslant x)=1-p(T\leqslant x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

a. Par application immédiate de la remarque précédente $\boxed{P_1=\mathrm{e}^{-1/2}}$.

b. De la même façon $\boxed{P_2=\mathrm{e}^{-1}}$.

c. L'intersection des évènements $(T\geqslant 25\,000)$ et $(T\geqslant 50\,000)$ est l'évènement $(T\geqslant 50\,000)$. On a donc :

$$P_3=p(T\geqslant 50\,000\mid T\geqslant 25\,000)=\frac{p(T\geqslant 50\,000)}{p(T\geqslant 25\,000)}=\frac{P_2}{P_1}=\mathrm{e}^{-1+\frac{1}{2}}=\boxed{\mathrm{e}^{-1/2}}.$$

28 Nombres complexes et triangles équilatéraux (spécialité)

PREMIÈRE PARTIE

1. **a.** $j=\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. $j^3=\mathrm{e}^{3\times\frac{2i\pi}{3}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}=\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi=1$.

   c. $1+j+j^2=\dfrac{1-j^3}{1-j}=0$ d'après la question précédente.

   d. $-j^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{2\times\frac{2i\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{7i\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{7i\pi}{3}-2\mathrm{i}\pi}=\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$

2. **a.** Le triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si M est l'image de P par la rotation de centre N et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   La traduction complexe de cette rotation est $z\longmapsto z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z-n)+n$.

   Nous avons montré dans la question **1. d** que $\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}=-j^2$. Nous en déduisons que MNP est équilatéral direct lorsque :

$$m=-j^2(p-n)+n \iff m-n=-j^2(n-p)$$

   b. La condition de la question **2. a** est équivalente à $m+\left(-1-j^2\right)n+j^2p=0$.
   D'après la question **1. c** : $1+j+j^2=0$. Cela implique $-1-j^2=j$.

   Nous pouvons donc écrire que MNP est équilatéral direct lorsque $\boxed{m+nj+pj^2=0}$.

DEUXIÈME PARTIE

On note $o, a, b, c, d, e, f, m, n$ et p les abscisses respectives des points O, A, B, C, D, E, F, M, N et P.
Par hypothèse : $m=\dfrac{b+c}{2}$ $\quad n=\dfrac{d+e}{2}$ $\quad$ et $\quad p=\dfrac{f+a}{2}$.
On se propose de calculer $Z=m+nj+pj^2$ et de montrer qu'il s'annule : d'après le résultat prouvé dans la première partie, on pourra conclure que MNP est équilatéral direct.

$$2Z=(b+c)+j(d+e)+j^2(f+a)=\left(j^2a+b\right)+(c+jd)+\left(je+j^2f\right)$$

Le triangle BOA est équilatéral direct., ce qui implique : $b+jo+j^2a=0 \iff b+j^2a=-jo$.
Le triangle CDO est équilatéral direct., ce qui implique : $c+jd+j^2o=0 \iff c+jd=-j^2o$.
Le triangle OEF est équilatéral direct., ce qui implique : $o+je+j^2f=0 \iff je+j^2f=-o$.
Nous en déduisons $2Z=-\left(1+j+j^2\right)o$ et d'après la question **1 c.** de la première partie, $2Z=0$ donc $Z=0$.
On peut finalement conclure que $\boxed{\text{MNP est équilatéral direct}}$.

29 Des nombres étranges (spécialité)

1. Il est évident qu'un rep-unit ne peut être divisible par 2 : en effet, l'écriture décimale d'un nombre pair se termine par un chiffre pair, c'est-à-dire 0, 2, 4, 6 ou 8.

De même un rep-unit ne peut être divisible par 5 : en effet, l'écriture décimale d'un nombre divisible par 5 se termine par 0 ou 5.

2. Le rep-unit N_k est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3, ce qui est équivalent à $k \equiv 0$ modulo 3.

3. Montrons le résultat par récurrence sur k.

- Pour $k = 1$, on a d'une part $9N_1 = 9$ et d'autre part $10^1 - 1 = 10 - 1 = 9$.
  L'égalité est donc vérifiée.
- Supposons le résultat vérifié pour un certain entier $k \geqslant 1$ et montrons qu'il est alors vérifié pour l'entier $k+1$.
  On remarque que par définition $N_{k+1} = N_k + 10^k$ et donc $9N_{k+1} = 9N_k + 9 \times 10^k$.
  Appliquons l'hypothèse de récurrence :

$$9N_{k+1} = 10^k + 9 \times 10^k - 1 = 10 \times 10^k - 1 = 10^{k+1} - 1.$$

  Le résultat est donc vrai pour l'entier $k+1$.

En conclusion, pour tout $k \geqslant 1$: $9N_k = 10^k - 1$.

4. Soit $k \geqslant 1$ un entier naturel.

Posons la division euclidienne de k par 6 : $k = 6q + r$ où $0 \leqslant r \leqslant 6$. Nous en déduisons :

$$9N_k = 10^k - 1 = 10^{6q+r} - 1 = \left(10^6\right)^q \times 10^r - 1$$

Nous savons d'après le tableau de l'énoncé que $10^6 \equiv 1$ modulo 7. Nous en déduisons :

$$9N_k \equiv 10^r - 1 \quad \text{modulo } 7$$

- Supposons que 7 divise N_k. Cela implique $10^r - 1 \equiv 0$ modulo 7 : d'après le tableau de l'énoncé, le reste de la division de k par 6 ne peut être différent de 0. Donc 6 divise k.
- Supposons réciproquement que 6 divise k ou encore que $r = 0$.
  Nous en déduisons que $9N_k \equiv 0$ modulo 7 ou encore que 7 divise $9N_k$. Or 7 et 9 sont premiers entre eux : d'après le théorème de Gauss, 7 divise N_k.

En conclusion, l'équivalence est prouvée.

30 Répétition de l'unité et carrés (spécialité)

1. Il est évident qu'un rep-unit ne peut être divisible par 2 : en effet, l'écriture décimale d'un nombre pair se termine par un chiffre pair, c'est-à-dire 0, 2, 4, 6 ou 8.

De même un rep-unit ne peut être divisible par 5 : en effet, l'écriture décimale d'un nombre divisible par 5 se termine par 0 ou 5.

2. $N3 = 111 = 3 \times 37$ $\qquad N4 = 1111 = 11 \times 101$ $\qquad N5 = 11111 = 41 \times 271$

3. a. Il est équivalent d'affirmer que « u est le chiffre des unités de l'écriture décimale de n » ou bien que « $n \equiv u$ modulo 10 et $0 \leqslant u < 10$. »

Le tableau suivant contient les restes modulo 10 de n et de n^2 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Donc $n^2 \equiv 1$ modulo 10 implique $n \equiv 1$ modulo 10 ou bien $n \equiv 9$ modulo 10.

Par conséquent, si le chiffre des unités de n^2 est 1, alors le chiffre des unités de n est nécessairement 1 ou 9.

b.
- Supposons $n \equiv 1$ modulo 10. Par définition, il existe un entier m tel que
$$n - 1 = 10m \iff n = 10m + 1$$
- Supposons $n \equiv 9$ modulo 10. Par définition, il existe un entier m' tel que
$$n - 9 = 10m' \iff n = 10m' + 9 = 10(m' + 1) - 10 + 9 = 10(m' + 1) - 1$$
En posant $m = m' + 1$, on obtient $n = 10m - 1$.

c.
- Supposons $n = 10m + 1$. Dans ce cas :
$$n^2 = 100m^2 + 20m + 1 = 20\left(5m^2 + m\right) + 1$$
On en déduit $n^2 \equiv 1$ modulo 20.
- Supposons $n = 10m - 1$. Dans ce cas :
$$n^2 = 100m^2 - 20m + 1 = 20\left(5m^2 - m\right) + 1$$
On en déduit de nouveau $n^2 \equiv 1$ modulo 20.

En conclusion, si l'écriture décimale de n se termine par 1, alors $n^2 \equiv 1$ modulo 20.

4. a. Pour $k \geqslant 2$, il existe un entier m tel que $N_k = 100m + 11 = 20(5m) + 11$.

Puisque $0 \leqslant 11 < 20$, le reste de la division euclidienne de N_k par 20 est 11.

b. Soit $k \geqslant 2$. Supposons que N_k est un carré.

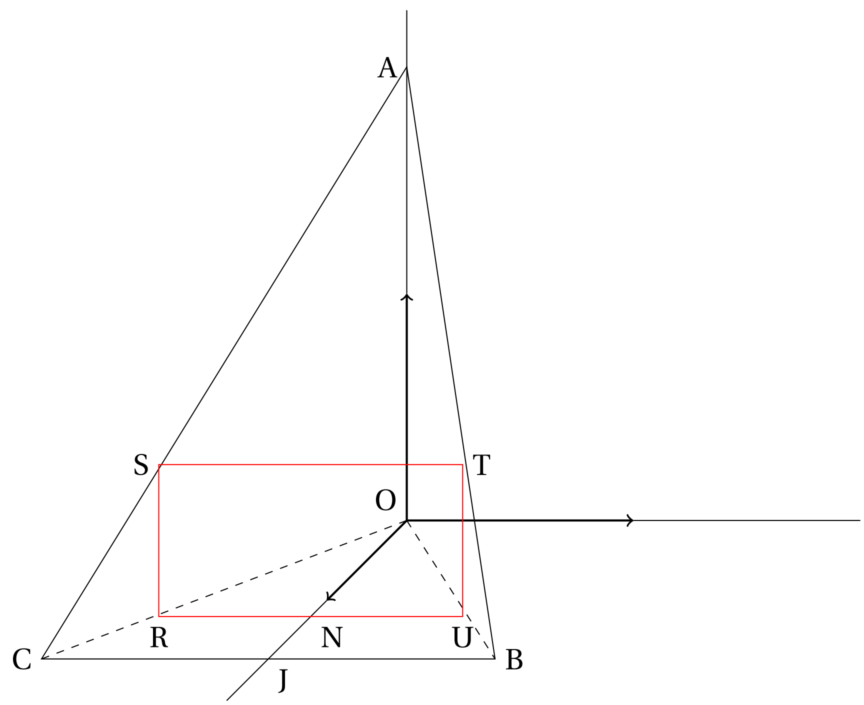
L'écriture décimale de N_k se termine par 1 : d'après la question **3 c.**, $N_k \equiv 1$ modulo 20. Puisque $0 \leqslant 1 < 20$, le reste de la division euclidienne de N_k par 20 est 1.

Or d'après la question **4 a.**, le reste de la division euclidienne de N_k par 20 est 11.
Nous obtenons une contradiction : N_k ne peut être un carré.

31 Tétraèdre : section plane, calcul de volume

Partie A

1. **a.** Figure.



b. On vérifie d'abord que O est équidistant des points A, B et C :

$$\mathrm{OA}^2 = 2^2 = 4 \qquad \mathrm{OB}^2 = \sqrt{3}^2 + 1^2 = 4 \qquad \mathrm{OB}^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4$$

On a donc OA = OB = OC = 2.
Vérifions maintenant que $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \times \sqrt{3} + 0 \times 1 + 2 \times 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0 \times \sqrt{3} + 0 \times -1 + 2 \times 0 = 0$$

Les triangles OAB et OAC sont donc isocèles rectangles en O.
On vérifie maintenant BC = 2 et on en déduit que OBC est équilatéral.
Pour finir, on vérifie :

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = 8 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{AC}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OC}^2 = 8$$

Par conséquent le triangle ABC est isocèle en A.

2. **a.** On montre que $\overrightarrow{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$:

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times \sqrt{3} + 0 \times 1 + \sqrt{3} \times -2 = 0 \qquad$ et $\qquad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times \sqrt{3} + 0 \times -1 + \sqrt{3} \times -2 = 0$

Puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), $\overrightarrow{u}$ est normal à ce plan.

b. Soit M(x ; y ; y ; z) un point de l'espace. Il appartient à (ABC) si et seulement si

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff x \times 2 + y \times 0 + (z-2) \times \sqrt{3} = 0 \iff \boxed{2x + \sqrt{3}z = 2\sqrt{3}}$$

Partie B

1. On calcule les coordonnée de J :

$$J\begin{pmatrix} x_J & = & \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} & = & \sqrt{3} \\ y_j & = & \dfrac{1+-1}{2} & = & 0 \\ z_j & = & \dfrac{0+0}{2} & = & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit OJ = $\sqrt{3}$. Puisque T est un point de [OJ], on a bien : $0 \leqslant \text{ON} \leqslant \text{OJ}$.

Sachant ON = t et OJ = $\sqrt{3}$, on peut conclure $\boxed{0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}}$.

2. Par hypothèse, $\overrightarrow{i}$ est normal à $\mathscr{P}$ et ce plan passe par N : on en déduit que $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $\boxed{x = t}$.

a.
- On sait que R est le point d'intersection de (OC) et de $\mathscr{P}$. Posons $\overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OC}$, ce qui implique $x_R = \lambda x_C$ c'est-à-dire $t = \lambda\sqrt{3}$. On en déduit $\overrightarrow{OR} = \dfrac{t}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OC}$.
  Sachant que U est le point d'intersection de (OB) et de $\mathscr{P}$, on démontre de la même façon $\overrightarrow{OU} = \dfrac{t}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OB}$.
  On déduit des deux relations précédentes
  $$\overrightarrow{UR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OU} = \frac{t}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{t}{\sqrt{3}}\overrightarrow{BC}.$$
  Les droites (UR) et (BC) sont donc parallèles.
- On sait que S est le point d'intersection de (AC) et de $\mathscr{P}$. Posons $\overrightarrow{AS} = \mu\overrightarrow{AC}$, ce qui implique $x_S = \mu\sqrt{3}$ c'est-à-dire $t = \mu\sqrt{3}$. On en déduit $\overrightarrow{AS} = \dfrac{t}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AC}$.
  Sachant que T est le point d'intersection de (AB) et de $\mathscr{P}$, on démontre de la même façon $\overrightarrow{AT} = \dfrac{t}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AB}$.
  On déduit des deux relations précédentes

$$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AT} = \frac{t}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{t}{\sqrt{3}}$$

Les droites (TS) et (BC) sont donc parallèles.

Nous venons de démontrer que (UR), (BC) et (TS) sont parallèles et que $\overrightarrow{UR} = \overrightarrow{TS}$: RSTU est donc un parallélogramme.

De plus les relations $\overrightarrow{OR} = \frac{t}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AS} = \frac{t}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AC}$ impliquent

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC} = \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - 1\right)\overrightarrow{OC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - 1\right)\overrightarrow{AC}$$

On en déduit $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{CR} - \overrightarrow{CS} = \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - 1\right)\overrightarrow{OA}$: les droites (SR) et (OA) sont parallèles.

Or RSTU est un parallélogramme et par conséquent (TU), (SR) et (OA) sont parallèles.

b. D'après la question précédente RSTU est un parallélogramme. Les vecteurs $\overrightarrow{UT}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{OA}$ est normal au plan OBC donc orthogonal à tout vecteur de ce plan, en particulier $\overrightarrow{UR}$.

On en déduit $\overrightarrow{UT} \cdot \overrightarrow{UR} = 0$ et RSTU est un rectangle.

c. Appliquons le théorème de Thalès au triangle OBJ, sachant (NU) // (JB) :

$$\frac{ON}{OJ} = \frac{NU}{JB} \iff NU = \frac{t}{\sqrt{3}}JB$$

On démontre de même dans le triangle OJC : $NR = \frac{t}{\sqrt{3}}JC$.

Ces deux résultats entraînent $\boxed{RU = \frac{2t}{\sqrt{3}}}$.

Appliquons le théorème de Thalès au triangle BAO, sachant (TU) // (OA) :

$$\frac{BU}{BO} = \frac{UT}{OA} \iff UT = 2\,\frac{BU}{BO}$$

Nous en déduisons : $TU = 2\left(1 - \frac{OU}{OB}\right) = \boxed{2\left(1 - \frac{t}{\sqrt{3}}\right)}$.

3. a. Puisque RSTU est un rectangle, on peut écrire :

$$S(t) = RU \times TU = \frac{2t}{\sqrt{3}}\,2\left(1 - \frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\frac{4t\left(\sqrt{3} - t\right)}{3}}$$

b. S est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable et pour tout $t \in [0, \sqrt{3}]$:

$$S'(t) = \frac{4}{3}\left(-2t + \sqrt{3}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - t\right)$$

On en déduit le tableau de variations de S :

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c. La fonction S atteint son maximum pour $\boxed{t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Dans ce cas RU = TU = 1 et RSTU est un carré.

4. a. Premier calcul du volume :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \left(t\sqrt{3} - t^2\right)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\left[\frac{t^2\sqrt{3}}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

b. Second calcul du volume : on choisit le triangle OBC pour base et [OA] pour hauteur.

- l'aire de OBC est $\mathcal{A} = \dfrac{\mathrm{OJ} \times \mathrm{BC}}{2} = \sqrt{3}$.
- la hauteur correspondante est $h = OA = 2$

Le volume du tétraèdre est donc $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}\ h}{3} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$.

c. On trouve effectivement le même résultat par les deux méthodes.