

Corrigé du baccalauréat S Pondichéry avril 2001

EXERCICE 1

4 points

1. a. Calcul de I_1

$$\text{On a : } I_1 = \frac{1}{1!} \int_0^1 (1-x)^1 e^{-x} dx = \int_0^1 (1-x)^1 e^{-x} dx;$$

Faisons une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u(x) = 1-x & u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Toutes les fonctions étant intégrables sur $[0; 1]$, il vient :

$$I_1 = [-(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-1)(-e^{-x}) dx = 1 - \int_0^1 e^{-x} dx = 1 + [e^{-x}]_0^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

b. Inégalités :

Pour $0 \leq x \leq 1$, on a successivement : $0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x)^n \leq 1$ car $(n \geq 1)$

et, compte tenu du fait que e^{-x} est positif, on obtient :

$$0 \leq (1-x)^n e^{-x} \leq e^{-x};$$

la positivité de l'intégrale nous permet alors d'écrire :

$$0 \leq \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx$$

et, finalement :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx.$$

Conséquence : On a $\int_0^1 e^{-x} dx = [e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$ et l'inégalité, précédemment obtenue, s'écrit :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \frac{e-1}{e} : \text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \text{ donc, a fortiori, } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c. Pour $n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx.$

Intégrons par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= (1-x)^{n+1} & u'(x) &= -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) &= e^{-x} & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

Toutes ces fonctions étant continues sont intégrables sur $[0; 1]$ et

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} [-e^{-x}(1-x)^{n+1}]_0^1 - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (n+1)(1-x)^n e^{-x} dx = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$

2. a. Par récurrence :

Initialisation : $a_1 = 0$ et $\frac{1}{e} + (-1)^1 I_1 = \frac{1}{e} - I_1 = 0$: la relation est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$. On a par définition de a_{n+1} :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{(n+1)!} - I_n \right] = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1} \text{ d'après la question 1. c.}$$

Conclusion : la relation (1) est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang $n \geq 1$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel n non nul $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

b. Limite de la suite (a_n)

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |(-1)^n I_n| = 0$.

Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{e}$.

EXERCICE 2

4 points

1. Écriture de $f(z)$ sous forme algébrique Avec $z = x + iy$ (z et y réels) :

$$f(z) = \frac{2-iz}{1-z} = \frac{2-i(x+iy)}{1-x-iy} = \frac{2+y-ix}{1-x-iy} = \frac{(2+y-ix)(1-x+iy)}{(1-x+iy)(1-x-iy)} = \frac{(2+y)(1-x) + xy + iy(2+y) + i(x(x-1))}{(1-x)^2 + y^2} = \frac{2-2x+y+i(x^2+y^2-x+2y)}{(1-x)^2 + y^2}.$$

Ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit réel :

Si $z \neq 1$, soit $(x; y) \neq (1; 0)$, c-à-d $M \neq A$, $f(z)$ existe et $f(z) \in \mathbb{R}$ si sa partie imaginaire est nulle soit d'après la question précédente si :

$$x^2 + y^2 - x + 2y = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4},$$

équation du cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, cercle privé du point A.

2. a. Le complexe i n'a pas d'antécédent par f . Pour déterminer les antécédents de i par f on doit résoudre l'équation $f(z) = i$; on obtient :

$$\text{Pour } z \neq 1 : f(z) = i \iff \frac{2-iz}{1-z} = i \iff 2-iz = i-iz \iff 2 = i \text{ qui n'a pas de solution donc } i \text{ n'a pas d'antécédent par } f.$$

Expression de z en fonction de z' ($z' \neq i$).

$$\text{Si } z' \neq i, f(z) = z' \iff \frac{2-iz}{1-z} = z' \iff 2-iz = z' - zz' \iff z(z' - i) = z' - 2 \iff$$

$$z = \frac{z' - 2}{z' - i}.$$

Conclusion : tout complexe z' , distinct de i , admet, par f un unique antécédent z , tel que $z = \frac{z' - 2}{z' - i}$.

b. Relation : $OM = \frac{M'C}{M'D}$

De la relation $z = \frac{z' - 2}{z' - i}$ on déduit en prenant les modules :

$$|z| = \left| \frac{z' - 2}{z' - i} \right| = \frac{|z' - 2|}{|z' - i|}$$

ou encore, en notant C le point d'affixe 2, D le point d'affixe i et M et M' les points d'affixes z et z' , $OM = \frac{CM'}{DM'}$.

c. Étude de M' lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1

Si le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé de A , on a $OM = 1$ et par conséquent d'après la question précédente :

$1 = \frac{CM'}{DM'}$: cette égalité signifie que M' appartient à la médiatrice (Δ) de $[CD]$.

d. Étude de M' lorsque M décrit l'axe réel

La relation $z = \frac{z' - 2}{z' - i}$ donne en termes d'arguments :

$$\arg z = \arg(z' - 2) - \arg(z' - i) \pmod{.2\pi};$$

ou encore :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{CM'}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}\right) \pmod{.2\pi} = \left(\overrightarrow{DM'}, \overrightarrow{CM'}\right).$$

Si M est un point de l'axe réel distinct de O et de A , on a

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = 0 \pmod{.\pi} \text{ donc}$$

$$\left(\overrightarrow{DM'}, \overrightarrow{CM'}\right) = 0 \pmod{.\pi}.$$

Conclusion : le point M' appartient à la droite (CD) (il est distinct du point D et du point C).

EXERCICE 2 enseignement de spécialité

4 points

1. a. 11 nombre premier ne divise pas 24; donc 11 et 24 sont premiers entre eux; d'après le théorème de Bezout il existe des entiers relatifs u et v tels que $11u + 24v = 1$, donc le couple $(4; -v)$ est un couple solution de l'équation (1).

b. On applique l'algorithme d'Euclide à 24 et 11 :

$$24 = 2 \times 11 + 2$$

$$11 = 5 \times 2 + 1, \text{ soit en remontant :}$$

$$1 = 11 - 5 \times 2$$

$$1 = 11 - 5 \times (24 - 2 \times 11) \text{ ou encore}$$

$$1 = 11 - 5 \times 24 + 10 \times 11 \text{ et enfin}$$

$$1 = 11 \times 11 - 5 \times 24.$$

Le couple $(11; 5)$ est une solution particulière de l'équation (1).

c. Résolution de l'équation (1) : on a

$$\begin{cases} 11n - 24m & = 1 \\ 11 \times 11 - 24 \times 5 & = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{(par différence)}$$

$$11(n - 11) - 24(m - 5) = 0 \iff 11(n - 11) = 24(m - 5) \quad (2).$$

11 divise donc $24(m - 5)$, mais on a vu qu'il est premier avec 24, donc d'après le théorème de Gauss il divise $m - 5$.

$$\text{Il existe donc } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } m - 5 = 11k \iff m = 5 + 11k.$$

En reportant dans l'équation (2), on obtient :

$$11(n - 11) = 24 \times 11k \iff n - 11 = 24k \iff n = 11 + 24k.$$

Conclusion : les solutions de l'équation (1) sont les couples $(n; m)$ tels que :

$$n = 11 + 24k \quad \text{et} \quad m = 5 + 11k.$$

2. a. Pour $a \in \mathbb{N}$, on sait que :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

En particulier : $10^n - 1 = (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1)$ ou encore :

$10^n - 1 = 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1)$ égalité qui montre que 9 divise $10^n - 1$, donc en particulier $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. Puisque $(n; m)$ est un couple solution de l'équation (1) : $11n - 24m = 1$ ou encore $11n = 24m + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) &= (10^{24m+1} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = \\ &= (10^{24m} \times 10 - 1) - 10(10^{24m} - 1) = -1 + 10 = 9. \end{aligned}$$

c. On a $10^{11n} - 1 = (10^{11})^n - 1$ et d'après l'égalité rappelée au a. :

$$(10^{11})^n - 1 = (10^{11} - 1)(10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \dots + 1), \text{ donc } 10^{11} - 1 \text{ divise } 10^{11n} - 1.$$

Il existe donc un entier α tel que $10^{11n} - 1 = \alpha(10^{11} - 1)$.

On démontrerait de la même façon que $10^{24} - 1$ divise $10^{24n} - 1$ et qu'il existe donc un entier β tel que $10^{24n} - 1 = \beta(10^{24} - 1)$.

L'égalité trouvée au b. $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$ peut donc s'écrire :

$$\alpha(10^{11} - 1) - 10 \times \beta(10^{24} - 1) = 9.$$

On a donc trouvé deux entiers $N = \alpha$ et $M = 10\beta$ tels que :

$$N(10^{11} - 1) - M(10^{24} - 1) = 9.$$

d. Tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et à $10^{24} - 1$ divise les produits $N(10^{11} - 1)$ et $M(10^{24} - 1)$ et aussi leur différence et par conséquent 9.

e. On vient de voir que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et à $10^{24} - 1$ et donc en particulier leur P. G. C. D. divise 9, mais on a vu inversement que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

Conclusion : P. G. C. D. $(10^{11} - 1; 10^{24} - 1) = 9$.

PROBLÈME

12 points

Partie A

1. a. C a pour coordonnées (1; 0). Une équation de la tangente (Δ) à la courbe C représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$ a pour équation :

$$M(x; y) \in (\Delta) \iff y - 0 = \frac{1}{1}(x - 1) \iff y = x - 1.$$

b. $f(x) = x - 1 - \ln x$.

La fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$. D'où le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		
		0	

c. Le tableau de variation montre que $f(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$.

Mais $x - 1 - \ln x \geq 0 \iff x - 1 \geq \ln x$ et cette inégalité montre que la droite (Δ) est au dessus de la courbe C , le seul point de contact étant le point C .

2. a. Le résultat précédent peut s'écrire :

$x - 1 - \ln x \geq 0 \iff x - \ln x \geq 1$ et cette valeur 1 est obtenue de façon évidente pour $x = 1$.

Le minimum de la fonction $x - \ln x$ est 1.

b. On a $M(x; \ln x)$ et $N(x; x)$, donc $MN^2 = (x - x)^2 + (x - \ln x)^2 = (x - \ln x)^2$. or on vient de voir que le minimum de $x - \ln x$ est 1 donc le minimum de MN^2 est $1^2 = 1$, donc le minimum de MN est 1, soit avec une unité graphique de 4 cm : le minimum de MN égale 4 cm.

Partie B

1. $O(0; 0)$; $M(x; \ln x)$, donc $OM^2 = x^2 + (\ln x)^2$.

Donc $OM = \sqrt{x^2 + (\ln x)^2}$.

2. Étude de u définie par $u(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

a. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = +\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.

u somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle on a :

$u'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 2}{x}$: tous les termes de ce quotient sont positifs, donc la dérivée est positive et la fonction u est croissante sur $]0; +\infty[$ de $-\infty$ à $+\infty$.

b. D'après la question précédente u établit une bijection de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R} et l'équation $u(x) = 0$ a une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$.

La calculatrice donne $u(0,5) \approx -0,44$ et $u(1) = 1$, donc $0,5 < \alpha < 1$.

Puis $u(0,65) \approx -0,008$ et $u(0,66) \approx 0,020$, d'où l'encadrement :

$$0,65 < \alpha < 0,66.$$

c. Le résultat précédent et le tableau de variations de u montrent que :

- $u(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$;
- $u(\alpha) = 0$;
- $u(x) > 0$ sur $] \alpha; +\infty[$.

3. Étude de g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

g somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$g'(x) = 2x + 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 2 \ln x}{x} = \frac{2}{x} (x^2 + \ln x) = \frac{2}{x} u(x).$$

Comme $\frac{2}{x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $u(x)$ et celui-ci a été trouvé à la question précédente; il dépend de la position de x par rapport à α . On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

On a de façon immédiate : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

On sait que $u(\alpha) = \alpha^2 + \ln \alpha = 0 \iff \ln \alpha = -\alpha^2$.

Donc $g(\alpha) = \alpha^2 + (\ln \alpha)^2 = \alpha^2 + (-\alpha^2)^2 = \alpha^2 + \alpha^4$.

4. Puisque $OM = \sqrt{g(x)}$, la plus courte distance est $\sqrt{g(\alpha)}$.

En prenant comme valeur approché de $\alpha \approx 0,655$ et compte tenu de l'unité graphique la plus courte distance OM est environ $4\sqrt{g(\alpha)} \approx 3,12$ (cm)

5. On a $A(\alpha; \ln \alpha)$; la tangente en A à C a pour coefficient directeur $\frac{1}{\alpha}$ et donc pour vecteur directeur $\vec{t}(\alpha; 1)$.

Donc $\vec{OA} \cdot \vec{t} = \alpha^2 + \ln \alpha = u(\alpha) = 0$.

Les vecteurs sont orthogonaux donc la tangente à (C) en A est perpendiculaire à (OA).

Partie C

1. $h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x)$.

$h(x) = x \iff x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x) = x \iff \frac{1}{4}(x^2 + \ln x) = 0 \iff x^2 + \ln x = 0 \iff u(x) = 0$.

On a vu que cette équation avait pour solution unique α .

2. a. h somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{4}\left(2x + \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4x}(4x - 2x^2 - 1) = \frac{1}{4x}(-2x^2 + 4x - 1).$$

Comme $\frac{1}{4x} > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui du trinôme $-2x^2 + 4x - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Or } -2x^2 + 4x - 1 &= -2\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) = -2\left[(x-1)^2 - 1 + \frac{1}{2}\right] = -2\left[(x-1)^2 - \frac{1}{2}\right] = \\ &= -2\left[x-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\left[x-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $h'(x) = 0$ sont donc :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71 \text{ et } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1,71.$$

On sait que le trinôme est négatif sauf sur l'intervalle $[0,71; 1,71]$, donc en particulier sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$ où $h'(x) > 0$.

b. On a $h(1) = \frac{3}{4} = 0,75$ et $h(\frac{1}{2}) \approx 0,61$.

On a vu que la dérivée est positive, donc la fonction croissante de $h(\frac{1}{2}) \approx 0,61$ à $h(1) = 0,75$.

Donc $h([\frac{1}{2}; 1]) \subset [\frac{1}{2}; 1]$.

c. Dérivée seconde :

h' est elle-même dérivable et sur $[\frac{1}{2}; 1]$:

$$h''(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{1-2x^2}{4x^2} = \frac{(1+x\sqrt{2})(1-x\sqrt{2})}{4x^2}.$$

Comme $1+x\sqrt{2}$ et $4x^2$ sont positifs le signe de $h''(x)$ est celui de la différence $1-x\sqrt{2}$, donc

$$h''(x) < 0 \text{ sur } \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right] \text{ et}$$

$$h''(x) > 0 \text{ sur } \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

d. De la question précédente on peut établir le tableau de variations de h' :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$h''(x)$	+	0	-
$h'(x)$	0,25	$h'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,293$	0,25
			$+\infty$

$$h'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,293.$$

Conclusion : pour tout réel x de $[\frac{1}{2}; 1]$, $0 \leq h'(x) < 0,3$.

3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$.

a. On a vu à la question 2. b. que l'image par h d'un réel de l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$ appartenait à ce même intervalle.

Le premier terme de la suite appartient à cette suite et une récurrence évidente montre que tous les termes de la suite appartiennent à ce même intervalle.

Par récurrence :

- Initialisation : $u_1 = h(u_0) = h(1) = 0,75 \leq u_0$.
- Hérédité : supposons qu'il existe un rang p tel que $u_p \leq u_{p-1}$; par croissance de la fonction h sur $[\frac{1}{2}; 1]$ on obtient $h(u_p) \leq h(u_{p-1}) \iff u_{p+1} \leq u_p$.

On a bien démontré par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

b. On sait $h(\alpha) = \alpha$, donc :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |u_{n+1} - h(\alpha)|.$$

u_n et α appartenant à l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$ on applique l'inégalité des accroissements finis à h et compte tenu que $h'(x)$ est majorée par 0,3 :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,3 |u_n - \alpha|.$$

On a donc successivement :

$$|u_n - \alpha| \leq 0,3 |u_{n-1} - \alpha| \leq (0,3)^2 |u_{n-2} - \alpha| \leq \dots \leq (0,3)^n |u_0 - \alpha|.$$

Comme $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$, on obtient finalement

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} (0,3)^n.$$

c. On sait que $\lim 0,3^n = 0$, donc $\lim |u_n - \alpha| = 0$ ce qui signifie que la limite de la suite (u_n) est le réel α .

d. u_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-5} près si $\frac{1}{2}(0,3)^{n_0} \leq 10^{-5} \iff (0,3)^{n_0} \leq 2 \times 10^{-5} \iff n_0 \ln 0,3 \leq \ln 2 - 5 \ln 10 \iff n_0 \geq \frac{\ln 2 - 5 \ln 10}{\ln 0,3} \iff n_0 \geq 8,98.$

Conclusion u_9 est une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Rem. La calculatrice donne $u_9 \approx 0,6529236.. \approx 0,65292.$