∾ Corrigé du baccalauréat STI Métropole juin 2003 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

1. a.

$$z^2 - 8z + 32 = 0 \iff (z-4)^2 - 16 + 32 = 0 \iff (z-4)^2 + 16 = 0.$$

$$\iff (z-4)^2 = (4\text{i})^2.$$

L'équation a donc deux solutions complexes :

$$z_1 = 4 + 4\text{i},\ z_2 = 4 - 4\text{i}.$$

b. On a $|z_1|^2 = 16 + 16 = 16 \times 2$, donc $|z_1| = 4\sqrt{2}$.

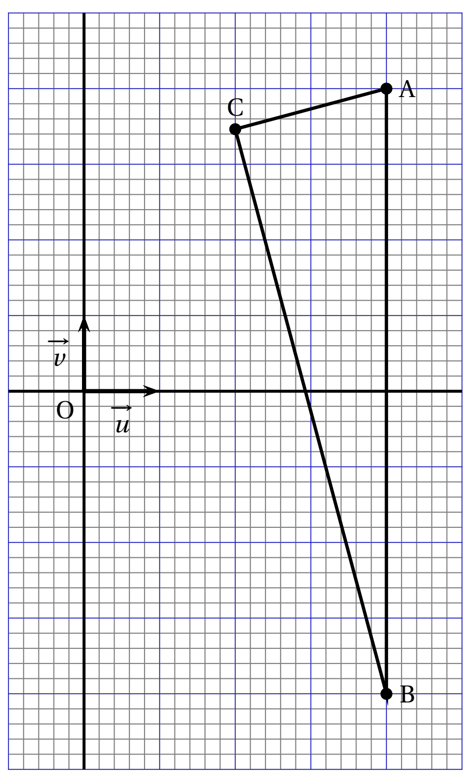
En factorisant ce module : $z_1 = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

Comme $z_2 = \overline{z_1}$, $z_2 = 4\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

2. Comme $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, il résulte que

$4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = 4\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\text{i}\sqrt{3}$.

3. a.



b.
- $AB = |z_B - z_A| = 4 - 4\text{i} - 4 - 4\text{i} = |-8\text{i}| = 8 \Rightarrow AB^2 = 64$.
- $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2 = (2-4)^2 + (2\sqrt{3} - 4)^2 = 4 + 12 + 16 - 16\sqrt{3} = 32 - 16\sqrt{3}$;

- $\text{BC}^2 = (x_\text{C} - x_\text{B})^2 + \left(y_\text{C} - y_\text{B}\right)^2 = (2-4)^2 + (2\sqrt{3} - (-4))^2 = 4 + 12 + 16 + 16\sqrt{3} = 32 + 16\sqrt{3}$.

Comme $\text{AC}^2 + \text{BC}^2 = 32 - 16\sqrt{3} + 32 + 16\sqrt{3} = 64 = \text{AB}^2$, il en résulte que le triangle ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore..

EXERCICE 2 **5 points**

1. a. $\text{LC} = 1,25 \times 10^{-3} \times 0,5 \times 10^{-2} = 0,625 \times 10^{-5} = 6,25 \times 10^{-6}$ et $\dfrac{1}{\text{LC}} = \dfrac{1}{6,25 \times 10^{-6}} = 1,6 \times 10^5$.

q est donc solution de l'équation :

$$(\text{E}) : \qquad y'' + 1,6 \times 10^5 y = 0.$$

b. (E) est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$, avec $\omega = 400$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $[0~;~+\infty]$ par

$q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, avec A et B réels.

c. $q(0) = 6 \times 10^{-3} \Rightarrow A = 6 \times 10^{-3}$

$q'(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t; \quad q'(0) = 0 \Rightarrow \omega B = 0 \iff B = 0$.

Finalement : $q(t) = 6 \times 10^{-3}\cos 400t$.

2. a. $i(t) = -q'(t) = -\left(-400 \times 6 \times 10^{-3}\sin 400t\right) = 2,4\sin 400t$.

b. $\dfrac{400}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos(800t)\,\text{d}t = \dfrac{400}{\pi} \times \dfrac{1}{800}\,[\sin 400t]_0^{\frac{\pi}{400}} = \dfrac{1}{2\pi}\left[\sin 400 \times \dfrac{\pi}{400} - \sin 400 \times 0\right] = \dfrac{1}{2\pi} \times 0 = 0$.

c.

$$\text{I}_e^2 = \frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t)\,\text{d}t.$$

Calculer I_e^2 (on pourra utiliser la formule $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$, puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près, sachant que I_e est un nombre positif.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. a. On lit $g(2) = 0$.

b. La droite (T) contient les points $(0~;~-3)$ et $(2\,;\,0)$. Sa pente égale au nombre dérivé de la fonction g en 2 est égale à : $\dfrac{0-(-3)}{2-0} = \dfrac{3}{2} = g'(2)$.

c. On a donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ (par valeurs inférieures)

d. La fonction g est croissante sur $]1~;~+\infty[$ et ne s'annule qu'en 2, donc :

- $g(x) < 0$, sur $]1\,;\,2[$;
- $g(2) = 0$;
- $g(x) >$ sur $]2~;~+\infty[$

2. a. $g_1(2) = 1 - \dfrac{1}{2-1} = 1 - 1 = 0$;

$g_2(2) = 1 - \dfrac{2}{2^2 - 2} = 1 - 1 = 0$;

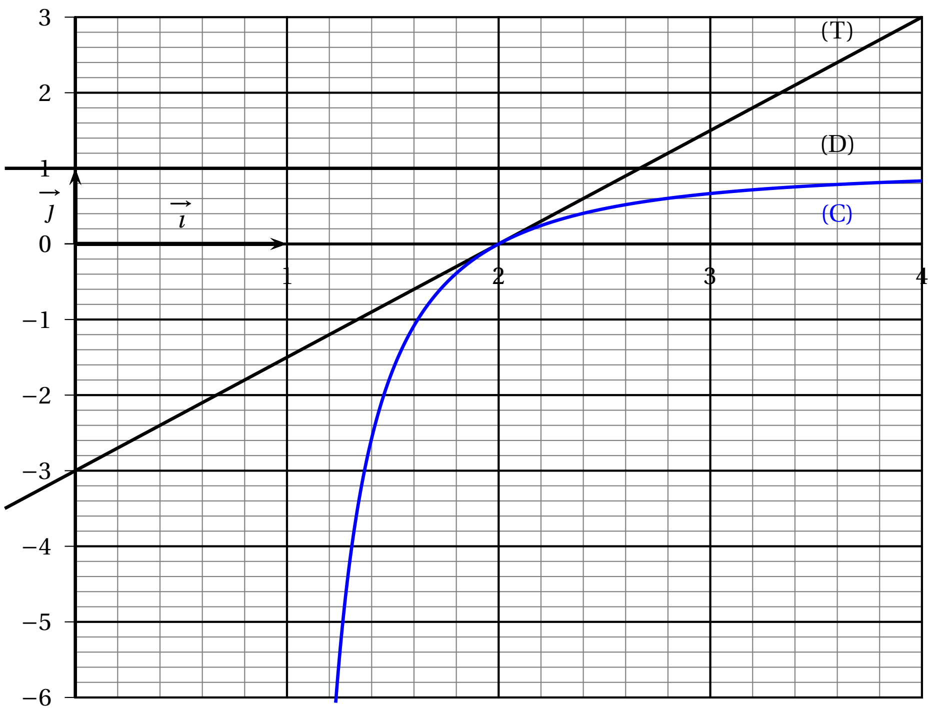
$g_3(2) = \ln(2-1) = \ln 1 = 0$.

Ces trois fonctions s'annulent en 2 : elles sont toutes candidates.

b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g_1(x) = 1$;

En écrivant $g_2(x) = 1 - \dfrac{2}{x(x-1)}$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g_2(x) = 1$;

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g_3(x) = +\infty$: donc g_3 ne peut être g.



c. $g_1'(x) = -\left[-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]$, donc $g_1'(2) = \dfrac{1}{1^2} = 1 \neq \dfrac{3}{2}$. Donc g_1 ne peut être g.

$g_2'(x) = +2\dfrac{2x-1}{\left(x^2-x\right)^2}$, donc $g_2'(2) = 2 \times \dfrac{3}{(4-2)^2} = \dfrac{3}{2}$.

Seule g_2 peut être g et comme l'une des trois était la fonction cherchée, alors $g = g_2$.

Partie B

1. **a.** Sur $]1\,;\,+\infty[$, $x > 0$, $x-1>0$, donc $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \ln x - \ln(x-1)$.

   (Propriété : pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

   b. On a $\lim\limits_{x\to 1} x+1+2\ln x = 2$.

   Comme $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x-1) = -\infty$.

   $$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty.$$

   On en déduit que la verticale $x = 1$ est asymptote à $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

2. **a.** En utilisant la question 1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1} = 1$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

   b. Soit d la fonction définie par $d(x) = f(x) - (x+1) = 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

   On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 0$, ce qui montre que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de plus l'infini.

c. Sur $]1~;~+\infty[$, $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x-1+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

Comme $x > 1 \iff x-1 > 0 \iff \dfrac{1}{x-1} > 0$, donc $\dfrac{x}{x-1} > 1$.

Il en résulte que $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) > 0$ et $2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) > 0$.

d. La question précédente montre que géométriquement, la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est au dessus de son asymptote $y = x+1$.

3. a. Sur $]1~;~+\infty[$, f somme de fonctions dérivable est dérivable et :

$\left(\dfrac{x}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1-x}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$;

Donc $f'(x) = 1 + 2\dfrac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} = 1 - 2\dfrac{1}{x(x-1)} = g(x)$.

b. On a vu dans la partie A le signe de g, c'est-à-dire celui de f'. D'où le tableau de variations de f :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Partie C

1. H somme de fonctions dérivables sur $]1~;~+\infty[$, est dérivable sur cet intervalle et $H'(x) = \ln x + \dfrac{x}{x} - \ln(x-1) - (x-1)\times\dfrac{1}{x-1} = \ln x + 1 - \ln(x-1) - 1 = \ln x - \ln(x-1) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = h(x)$.

Donc H est une primitive de la fonction h sur $]1~;~+\infty[$.

2. a.

b. On a vu que sur $]1~;~+\infty[$ et en particulier sur $[2~;~3]$, $x+1/leqslant f(x)$. Donc

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_2^3 \left[f(x) - (x+1)\right]\,\mathrm{d}x = \int_2^3 [2\ln x - 2\ln(x-1)]\,\mathrm{d}x = \int_2^3 2h(x)\,\mathrm{d}x = [2H(x)]_2^3 =$
$2H(3) - 2H(2) = 2(3\ln 3 - 2\ln 2) - 2(\ln 2 - \ln 1) = 6\ln 3 - 8\ln 2 = \ln 3^6 - \ln 2^8 = \ln 729 - \ln 256 =$
$\ln\left(\dfrac{729}{256}\right) \approx 1{,}0465 \approx 1{,}05$

Annexe : représentation de la courbe ($\mathscr{C}_f$)
à rendre avec la copie